Toplam Olasılık Kuralı

- Farklı farklı olaylara bağlı olarak başka bir olayın olasılığını hesaplamaya yarar:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

$$= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + ... + P(B/A_n)P(A_n)$$

- Burada $A_1, A_2, ...A_n$ ayrık olayları ifade eder.
- Örneğin havanın herhangi bir anda sıcaklığı gündüz ve gece olmaya göre şartlanabilir:

$$P(T) = P(T/gece)P(gece) + P(T/gunduz)P(gunduz)$$

Bağımsızlık (Independence)

- İki olayın bağımsız olması, yeni bir kavra olduğu ve olaslık aksiyomarından çıkarılamacağı için (şartlı olaslık gibi) tanımlanması gerekir
- Elimizdeki A ve B olayları için $P(A/B) = P(A)$ ise A olayı B'den bağımsız denir. Tanım budur.
- Bayes kuralını kullanırsak $P(A \cap B)/P(B) = P(A)$ yani:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

- Bu ikisi de bağımsızlık için tanımlar olarak kullanılabilir
- Bağımsızlık tanımının ikinci veriyonuna bakınca A ve B olayları için simetrik olduğu görülür.
- Dolayısı ile A'nın B'den bağımsız olması ve B'nin A'dan bağımsız olması aynı şeydir ve bağımsızlık şartı sağlanıyorsa genel olarak A ile B bağımsızdır denir.
- İki olayın bağımsız olup olmadığını anlamak için bağımsızlığın kelime anlamı üzerinden aklı ve mantık yürütmek yerine, direkt olarak matematiksel şartın sağlanıp sağlanmadığına bakılması he zaman daha sağlıklı/doğru sonuçlar verecektir.

Şartlı/Koşullu (Conditional) Bağımsızlık ve Çoklu Bağımsızlık

- Bağımsız olmayan iki olay bir üçüncü olaya şartlı olarak değerlendirildiğinde bağımsız olabilir. Bununu için şart şudur:

$$P(A \cap B/C) = P(A/C).P(B/C)$$

- İkiden fazla sayıda olayın birbirinden bağımsız olması içinse şu şart sağlanmalı:

$$P(\cap_{i \epsilon S} A_i) = \Pi_{i \epsilon S} P(A_i)$$

- Bu şart olayların çifter çifter birbirinden bağımsız olmasından daha kuvvetli bir şarttır
- Yani A_1 A_2 ile bağımsız, A_1 A_3 ile bağımsız, A_2 A_3 ile bağımsız oluğu halde A_1, A_2, A_3 bir üçlü olarak bağımsız olmayabilir

Sayma

- Şimdiye kadar olaslık ile ilgili basit hesaplar yaparken küme elemanlarını tek tek elimizle saymıştık
- Ama daha komplike problemler için tek tek bu şekilde küme elemanlarını saymak mümkün olmaz veya çok zor ve zahmetli olur
- Böyle durumlar için, bize bazı kurallara göre oluşmuş olan kümelerin eleman sayılarını veren formüller ve teknikler vardır
- Genel olarak bu sayma tekniklerini ve formüllerini, temel sayma prensibi, kombinasyon ve permütasyon olarak sayabiliriz

Temel Sayma Prensibi

- Arka arkaya bir deney yaptığımızı düşünelim. Birinci deneyin n_1, ikinci deneyin n_2,..., $i$inci deneyin ise n_i olası çıktısı olsun. Bütün i tane deneyden oluşan grubun olası bütün çıktılarının sayısı $n_1.n_2....n_i$ olur
- Bu zaten çarpmanın tanımından ve anlamından çıkan bir sonuçtur
- Örnek: Bir ülkede üç rakamlı mobil kodları 4 tane olsun: 532,535,505,533. Ve telefon numaralarının kendileri bu ön kod hariç 7 rakamdan oluşsun ve sıfırla başlamasına izin verilmesin. Bu kuralla göre toplam kaç tane mobil telefon numarası yazılabilir.
- Sayma prensibindeki tanım üzerinden gidersek, deneyler/prosesler 8 tanedir, 1 telefon kodu ve kalan 7 tane de rakam. Herbirinin olası çıktı sayılarını çarpmamız gerekiyor
- O zaman toplam telefon numarası sayısı: $4.9.10.10.10.10.10.10 = 36.10^6$, yani 36 milyon tane olur..
- Örnek: Eleman sayısı n olan bir kümenin altküme sayısı $2.2.2...2 = 2^n$ olur, çünkü her bir $n$eleman için bir alt kümede olmak veya olmamak gibi iki seçenek vardır.

Permütasyon

- Burada/Permütasyonda saydığımız şey n elemandan sırası önemli olacak şekilde k elemanı seçme şeklidir.
- Temel sayma prensibini kullanarak bu durumda toplam sayı $n.(n-1)...(n-(k-1)) = n.(n-1)...(n-k+1)$ olur ve n'nin k'li permütasyonu denir
- Çünkü seçilecek olana ilk eleman için n olası çıktı, ikincisi için $(n-1)$ olası çıktı .... olur, ve bunlar sayma prensibi gereği çarpılır
- Permütasyon şu şekilde de hesaplanabilir: $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Örnek: Harfleri birbirinden farklı dört harfli kelime sayısı$= 29!/25! = 29.28.27.26$

Kombinasyon

- Burada/kombinasyonda saydığımız şey n elemandan sırası önemli olmadan k elemanı seçme şeklidir.
- Sırası önemli olmadığı için genel olarak kombinasyon sonucu permütasyona göre daha küçük olur.
- Çünkü örnegin, A,B,C kümesinden iki elemanlı seçimler için, permütasyonda sayacağımız şeyler AB,BA,AC,CA,BC,CB iken kombinasyonda A ve B, A ve C, B ve C olur.
- Kombinasyon sayısını hesaplamak için daha önce çıkardığımız permütasyon sayısını kullanabiliriz.
- Permütasyon sayısını her $k$li grubun kendi içinde mümkün olan sıralama sayısına bölersek kombinasyon sayısını elde ederiz.
- Dolayısı ile kombinasyon şu şekilde hesaplanı ve gösterilir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Örnek Soru Çözümleri

- Örnek sorular derste çözülecektir.

•

•