## Dönüşümler/Moment Üreten Fonksiyonlar

- Herhangi bir rastgele değişken için OYF'ler için şöyle bir dönüşüm kullanışlı olduğundan özel biri isimle (moment üreten fonksiyonlar) tanımlanmıştır

$$M_X(s) = \mathrm{E}[e^{sX}] = \int e^{sX} f_X(x)\ dx$$

- Verilmiş olan bir moment üreten fonksiyonundan OYFye geçiş genel olarak tablolar kullanılarak yapılır. Yani önceden hesaplanmış OYF/Moment Üreten Fonksiyonu çiftleri kullanılır.
- Bu dönüşüme moment üreten fonksiyonu denir çünkü, $n$. dereceden moment bu dönüşüm fonksiyonu kullanılarak şu şekilde kolayca hesaplanabilir:

$$\mathrm{E}[X^n] = \frac{d^n M_X(s)}{ds^n}|_{s=0}$$

- Bu moment üreten fonksiyon veya dönüşümün başka bir pratik kullanım alanı ise iki bağımsız RD toplandığında ortaya çıkar.
- İki bağımsız $X$ ve $Y$ RD için toplamları başka bir RD olarak tanımlanmış olsun: $Z = X + Y$
- Bu durumda $M_Z(s) = \mathrm{E}[e^{sZ}] = \mathrm{E}[e^{s(X+Y)}] = \mathrm{E}[e^{sX}].\mathrm{E}[e^{sY}] = M_X(s).M_Y(s)$
- Yani iki bağımsız RDnin toplamlarının dönüşümü ayrı ayrı RDlerin dönüşümlerinin çarpımı ile bulunur.

## Limit Teoremleri: Markov Eşitsizliği

- Limit teoremleri OYF bilinmediği veya hesaplarının karmaşık olduğu durumlarda bazı olasılıklar için sınırlar koymakta faydalı olur.
- Örneğin $X$ diye bir RDmiz olsun. Bu RDnin belli bir değerden büyük olma olasılığını tam olarak hesaplayamıyorsak, bu olasılık için bir üst limit koymak bizim için değerli bir bilgidir.
- Bu tarz yaklaşık değerleri ya da limitleri limit teoremleri sayesinde elde edebiliriz.
- Bunlardan ilki Markov Eşitsizliğidir.

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{a}$$

## Markov Eşitsizliği: İspat

- İspatı şu şekilde yapılabilir:
- $Y_a$ şeklinde şöyle bir RD olsun

$$Y_a = \begin{cases} 0, & X \leq a \\ a, & X \geq a \end{cases}$$

- Bu tanımla $Y_a \leq X$, her iki tarafın beklenen değerini alırsak: $\mathrm{E}[Y_a] \leq \mathrm{E}[X]$
- $\mathrm{E}[Y_a]$ beklenen değerin tanımıyla şöyle hesaplanabilir: $\mathrm{E}[Y_a] = a.P(Y_a = a) = a.P(X \geq a)$
- Buradan $a.P(X \geq a) \leq \mathrm{E}[X]$ ya da $P(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{a}$ eşitsizliğine ulaşılmış olur.
- Buradaki pratik değer, bir olasılık değeri üzerine sadece beklenen değer bilgisi ile (OYF bilinmeden) bir üst sınır konulabilmesindedir.

## Chebyshev Eşitsizliği

- Chebyhev eşitsizliği bir RD'nin beklenen değerden uzak değerler alma ihtimali üzerüne bir üst sınır koyar:

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

- İspatı Markov Eşitsizliği kullanılarak basit bir şekilde yapılabilir.
- Markov Eşitsizliğinde $X$ yerine $(X-\mu)^2$, $a$ yerine de $c^2$ koyalım:

$$P((X-\mu)^2 \geq c^2) \leq \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^2]}{c^2}$$

- Buradan

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

  sonucuna ulaşmış olduk.

## Weak Law of Large Numbers/Büyük sayıların zayıf kanunu

- Weak Law of Large Numbers (WLLN), bir deneyi çok sayıda tekrarladığımızda, yani bir RDyi çok sayıda ölçtüğümüzde, bu ölçümlerin aritmetik ortalamasının, gerçek istatistiksel ortalamaya git gide yakınsadığını ifade eder.
- Matematiksel olarak

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \mu\right|\right) \geq \epsilon = P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

- İspatı tanımlanmış olan $M_n = \frac{X_1+...+X_n}{n}$ için Chebyev eşitsizliğinini kullanılması ile yapılmış olur.
- $\mathrm{E}[M_n] = n\mu/n = \mu$ ve $\mathrm{Var}(M_n) = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$ kullanılarak Chebyshev eşitsizliğine ulaşılır.

## Örnek Sorular ve Çözümleri

- Derste örnek sorular çözülmüştür.