Kümeler

- Kümeler ve küme işlemleri olasılığın temellerini oluşturmak için çok önemlidir

- Küme temel olarak belli nesnelerin ya da elamanların bir araya gelmesi ile oluşur

- Sonlu sayıda, sonsuz sayıda, kesikli veya sürekli elemanlar olabilir

- Kesikli elemanlar için $S = \{tura, yazı\}$ veya $S = \{0, 1, 2, ...\}$ şeklinde gösterilir

- Belli bir bağlamda bütün elemanların yer aldığı kümeye Evrensel Küme denir

Kümeler (Devam)

- Hiçbir elamanı olmayan kümeye ise boş küme adı verilir
- Sürekli elemanlar içinse $S = \{x|x > 2\}$ şeklinde gösterimler mümkündür
- A kümesinin B kümesini kapsaması demek B'deki her elemanın A'da yer alması demektir ve bu durum $A \supset B$ şeklinde gösterilir
- A kümesinin B kümesinin at kümesi olması demek ise A'daki her elemanın B'de yer alması demektir ve bu durum $A \subset B$ şeklinde gösterilir

Küme İşlemleri

- Yaygın olarak kullanılan küme işlemleri birleşme, kesişme ve ters alma olarak sıralanabilir.

- A ile B kümesinin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir ve birleşim kümesi iki kümedeki bütün elemanların bir araya gelmesi ile oluşur, veya ile de ifade edilir

- A ile B kümesinin kesişimi $A \cap B$ ile gösterilir ve kesişim kümesi iki kümedeki ortak elemanlardan oluşur, ve ile de ifade edilir

- A kümesinin tersi veya tümleyeni ise genel olarak A', A^c veya $\bar{A}$ şeklinde gösterilir ve A'da olmayan Evrensel Kümenin bütün diğer elemanlarından oluşur

Kümeler ile Olasılık Modelleri

- Olasılık matematiksel olarak herhangi bir olayda mümkün olan bütün çıktılara belli bir sayı verilmesinden ibarettir

- Yani herhangi bir deney ya da senaryo için bütün olası çıktılar (buna örnek uzay da denir) bir küme oluşturur, ve bu kümenin her bir elemanın bir sayı eşlenir. Bu sayı o olası çıktının olasılığı olarak belirlenir.

- Yani aslında olaslık modelinin "rastgele olmak" ile birebir ilişkisi yoktur, sadece matematiksel bir modellemedir

Kümeler ile Olasılık Modelleri (Devam)

- İşimize yarayacak deneylerde ve mühendislik problemlerinde bu olasılık modelinini geçerli bir rastgelelik modeli haline gelmesi, örnek uzayın ve bu örnek uzaydaki her küme elemanın eşlenecek olan sayının doğru ve iyi seçilmesi ile mümkün olur

- Örnek uzayın oluşturulması ve bu örnek uzayın her elemanına sayıllar (olaslıklar) eşlemesi sırasında bazı kurallara (axiomatic) uymak gerekir

Örnek Uzay ve Olaslıkların Belirlenmesi

- Örnek uzay elemanları belli bir deney ya da mühendislik problem için ayrık olmalı. Yani bir deney yaptığınızda o deneyin sonucu ya da çıktısının örnek uzayda bir ve yalnızca bir elemana denk gelmesi gerekir

- Örnek uzay bütün olası deney çıktıları için bir eleman içermelidir, yani örnek uzayda karşılığı olmayan bir deney çıktısının mümkün olmaması gerekir.

Olaslık Modeli Aksiyomları

- Olaslıklar içinse aksiyomatik olarak (yani tanım gereği) üç tane şartın sağlanması gerekir
  - Negatif olmama: her olaslık değeri sıfır veya sıfırdan büyük olmalı
  - Toplanma özelliği: A ve B ayrık olaylar ise A veya B nin gerçekleşme olaslığı A'nın gerçekleşme olasılığı ve B'nin gerçekleşme olaslığının toplamına eşit olmalı. Matematiksel olarak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

  - Normalizasyon. Evrensel kümenin olasılığı ya da bütün mümkün olan çıktıların olaslıklar toplamı bire eşit olmalı. Matematiksel olarak $P(E) = 1$

Olaslık Modeli Örneği

- İki adet paranın atılması deneyine bakalım.

- Mümkün olan bütün çıktıların karşılandığı örnek uzay alternatifleri şunlar olabilir
  - ÖU1:{YY, YT, TT, TY}, paraların sırası da önemli görülüyor
  - ÖU2:{2 yazı, 2 tura, 1 yazı 1 tura}, paraların sırası önemli değil

- Bu iki örnek de uygun örnek uzaylardır çünkü, elemanları ayrıktır ve her olası çıktı için örnek uzayında bir eleman vardır.

- Ama mesela şu olaslık modeline uygun bir örnek uzay oluşturmaz: {En az biri yazı, En az biri tura}, çünkü YT veya TY yazı geldiğinde kümenin iki elemanı da buna uygundur.

Olaslık Modeli (Devam)

- Kurallara uygun her olasalık modeli geçerli bir olasılık modeli olarak kabul edilir

- Ancak bu olasılık modellerinini yararlı olması için gerçek bir probleme uygun olmaları beklenir

- Dolayısı ile sadece belirtilen şartları sağlayan her olasılık modeli bizim için "uygun" olmayabilir

- Olasılık modeli aksiyomlarından aşağıdaki basit sonuca ulaşılabilir

- Örnek uzaydaki bütün elemanların olasılıı eşit ise P(A)=A'nın eleman sayısı / Evrensel kümenin eleman sayısı

Olaslık Modeli (Devam)

- Olasılık modeli aksiyomlarından ayrıca aşağıdaki yararlı ifadeler çıkarılabi

- $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Şartlı Olaslık

- Şartlı olaslık yeni bir ifade olduğu için bunu matematiksel olarak tanımlamamız gerekir

- Şartlı olaslık sembol olarak $P(A/B)$ olarak ifade edilir ve $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$ olarak tanımlanır

- Bu tanım aksiyomatiktir yani biz öyle dediğimiz için öyledir, yeni birşey olduğu ve tanım olduğu için olaslık modelinini aksiyomlarından çıkarılamaz

- Matematiksel olarak biz tanımlamakla beraber (ne olduğuna istediğimiz gibi karar verdik), bu tanımın gerçek olaylar ve problemler için yararlı bir tanım olması beklenir ve gerçekten de öyledir

Şartlı Olasılık (Devam)

- Ayrıca "şartlı olasılık" diye bizim tanımladığımız şeyin geçerli bir "olasılık" olması için olasılık modeli aksiyomlarını sağlaması gerekir ki, bu kolayca gösterilebilir

- Dolayısı ile matematiksel tanım dışında anlamsal olarak ifade edecek olursak, $P(A/B)$ A olayının -B olayının gerçekleştiğini bildiğimiz durumdaki- olasılığını ifade eder

- B olayının olduğunu biliyorsak (ön bilgi olarak) A'nın olasılığı nedir şeklinde de ifade edilebilir

Şartlı Olaslık Örneği

- Örnek olarak hilesiz bir zar atıyoruz, ve zarın çift olduğunu biliyorsak 4 olma ihtimali nedir?

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ tanımlarıyla $P(A/B) =?$

- $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$. Burada $A \cap B = \{4\}$ olduğuna göre $P(A/B) = 1/3$

Bayes Kuralı

- Şartlı olasılık tanımı kullanılarak basit gibi görünen ama çok derin anlamları:) ve önemi olan Bayes Kuralı kolayca ispatlanabilir

- $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$ ve $P(B/A) = P(A \cap B)/P(A)$ olduğuna göre (tanım gereği)

- $P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)$ veya $P(A/B) = \frac{P(B/A).P(A)}{P(B)}$

- Yani Bayes kuralı iki olayın birbirlerine göre şartlı olaslıkları arasında geçiş yapmamızı sağlar