# Toplam Olasılık Kuralı

- Farklı farklı olaylara bağlı olarak başka bir olayın olasılığını hesaplamaya yarar:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

$$= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + ... + P(B/A_n)P(A_n)$$

- Burada $A_1, A_2, ...A_n$ ayrık olayları ifade eder.

- Örneğin havanın herhangi bir anda sıcaklığı gündüz ve gece olmaya göre şartlanabilir:

$$P(T) = P(T/gece)P(gece) + P(T/gunduz)P(gunduz)$$

# Örnek

Bir satranç turnuvasına katılıyorsun. Oyuncuların yarısı ile yaptığın maçı kazanma olasılığın 0.3 (bunlara tip 1 diyeceğiz). Çeyreği ile yaptığın maçı kazanma olasılığın 0.4 (bunlara tip 2 diyeceğiz), ve kalan çeyreği ile yaptığın maçı kazanma olasılığın 0.5 (bunlara tip 3 diyeceğiz). Rastgele seçilmiş rakiplere karşı oynarsan kazanma olasılığın nedir?

$A_i$ tip $i$ ile oynama olayı olursa;

$$\mathbf{P}(A_1) = 0.5, \qquad \mathbf{P}(A_2) = 0.25, \qquad \mathbf{P}(A_3) = 0.25.$$

$B$ kazanma olayı olursa;

$$\mathbf{P}(B|A_1) = 0.3, \qquad \mathbf{P}(B|A_2) = 0.4, \qquad \mathbf{P}(B|A_3) = 0.5.$$

Toplam olasılık teoreminden, kazanma olasılığı:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B|A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B|A_2) + \mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}(B|A_3) \\ &= 0.5 * 0.3 + 0.25 * 0.4 + 0.25 * 0.5 \qquad (1) \\ &= 0.375 \end{aligned}$$

## Bağımsızlık (Independence)

- İki olayın bağımsız olması, yeni bir kavra olduğu ve olaslık aksiyomarından çıkarılamacağı için (şartlı olaslık gibi) tanımlanması gerekir

- Elimizdeki $A$ ve $B$ olayları için $P(A/B) = P(A)$ ise $A$ olayı $B$'den bağımsız denir. Tanım budur.

- Bayes kuralını kullanırsak $P(A \cap B)/P(B) = P(A)$ yani:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

- Bu ikisi de bağımsızlık için tanımlar olarak kullanılabilir

## Bağımsızlık (Independence)

- Bağımsızlık tanımının ikinci veriyonuna bakınca $A$ ve $B$ olayları için simetrik olduğu görülür.

- Dolayısı ile $A$'nın $B$'den bağımsız olması ve $B$'nin $A$'dan bağımsız olması aynı şeydir ve bağımsızlık şartı sağlanıyorsa genel olarak $A$ ile $B$ bağımsızdır denir.

- İki olayın bağımsız olup olmadığını anlamak için bağımsızlığın kelime anlamı üzerinden aklı ve mantık yürütmek yerine, direkt olarak matematiksel şartın sağlanıp sağlanmadığına bakılması he zaman daha sağlıklı/doğru sonuçlar verecektir.

# Şartlı/Koşullu (Conditional) Bağımsızlık ve Çoklu Bağımsızlık

- Bağımsız olmayan iki olay bir üçüncü olaya şartlı olarak değerlendirildiğinde bağımsız olabilir. Bununu için şart şudur:

$$P(A \cap B/C) = P(A/C).P(B/C)$$

- İkiden fazla sayıda olayın birbirinden bağımsız olması içinse şu şart sağlanmalı:

$$P(\cap_{i \epsilon S} A_i) = \Pi_{i \epsilon S} P(A_i)$$

- Bu şart olayların çifter çifter birbirinden bağımsız olmasından daha kuvvetli bir şarttır

- Yani $A_1$ $A_2$ ile bağımsız, $A_1$ $A_3$ ile bağımsız, $A_2$ $A_3$ ile bağımsız oluğu halde $A_1, A_2, A_3$ bir üçlü olarak bağımsız olmayabilir

# Örnek

Art arda 2 defa 4 yüzlü bir zarın atılma deneyinde 16 muhtemel sonucun hepsi aynı ihtimalle (1/16) gelmektedir.

$$A = \{\text{ilk zar atışı } 1\}, \qquad B = \{2 \text{ zar atışının toplamı } 5\}$$

olayları bağımsız mıdır?

Buradaki cevap beklenin (düz mantığın) aksi bir sonuç verecek, bakalım:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\text{iki zarın sonuçları (1,4)}) = \frac{1}{16},$$

ayrıca

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{A olayındaki eleman sayısı}}{\text{toplam ihtimal sayısı}} = \frac{4}{16}.$$

B olayındaki çıktılar $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ ve

$$\mathbf{P}(B) = \frac{\text{B olayındaki eleman sayısı}}{\text{toplam ihtimal sayısı}} = \frac{4}{16}.$$

$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ olduğuna göre A ve B olayları bağımsızdır.

# Örnek

$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$ eşitliği çifter çifter bağımsızlık için yeterli değildir. Adil 6 yüzlü zarın iki defa atılmasında aşağıdaki olayları düşünün:

$$A = \{\text{ilk zar atışı 1, 2 veya 3}\},$$
$$B = \{\text{ilk zar atışı 3, 4 veya 5}\},$$
$$C = \{\text{iki zar atışının toplamı 9}\}.$$

Bunlara göre:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} * \frac{4}{36} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C),$$
$$\mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2} * \frac{4}{36} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Yani A, B ve C olaylarından bağımsız 2 tane olay yoktur, ama üçlü olarak bağımsızdırlar. Diğer bir deyişle:

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{4}{36} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$$

# Sayma

- Şimdiye kadar olaslık ile ilgili basit hesaplar yaparken küme elemanlarını tek tek elimizle saymıştık

- Ama daha komplike problemler için tek tek bu şekilde küme elemanlarını saymak mümkün olmaz veya çok zor ve zahmetli olur

- Böyle durumlar için, bize bazı kurallara göre oluşmuş olan kümelerin eleman sayılarını veren formüller ve teknikler vardır

- Genel olarak bu sayma tekniklerini ve formüllerini, temel sayma prensibi, kombinasyon ve permütasyon olarak sayabiliriz

# Temel Sayma Prensibi

- Arka arkaya bir deney yaptığımızı düşünelim. Birinci deneyin $n_1$, ikinci deneyin $n_2$,..., $i$inci deneyin ise $n_i$ olası çıktısı olsun. Bütün $i$ tane deneyden oluşan grubun olası bütün çıktılarının sayısı $n_1.n_2....n_i$ olur

- Bu zaten çarpmanın tanımından ve anlamından çıkan bir sonuçtur

- Örnek: Bir ülkede üç rakamlı mobil kodları 4 tane olsun: 532,535,505, 533. Ve telefon numaralarının kendileri bu ön kod hariç 7 rakamdan oluşsun ve sıfırla başlamasına izin verilmesin. Bu kuralla göre toplam kaç tane mobil telefon numarası yazılabilir.

## Temel Sayma Prensibi (Devam)

- Sayma prensibindeki tanım üzerinden gidersek, deneyler/prosesler 8 tanedir, 1 telefon kodu ve kalan 7 tane de rakam. Herbirinin olası çıktı sayılarını çarpmamız gerekiyor

- O zaman toplam telefon numarası sayısı: $4.9.10.10.10.10.10.10 = 36.10^6$, yani 36 milyon tane olur..

- Örnek: Eleman sayısı $n$ olan bir kümenin altküme sayısı $2.2.2...2 = 2^n$ olur, çünkü her bir $n$eleman için bir alt kümede olmak veya olmamak gibi iki seçenek vardır.

# Permütasyon

- Burada/Permütasyonda saydığımız şey $n$ elemandan sırası önemli olacak şekilde $k$ elemanı seçme şeklidir.

- Temel sayma prensibini kullanarak bu durumda toplam sayı

$$n.(n-1)...(n-(k-1)) = n.(n-1)...(n-k+1)$$

  olur ve $n$'nin $k$'li permütasyonu denir

- Çünkü seçilecek olana ilk eleman için $n$ olası çıktı, ikincisi için $(n-1)$ olası çıktı .... olur, ve bunlar sayma prensibi gereği çarpılır

- Permütasyon şu şekilde de hesaplanabilir: $\frac{n!}{(n-k)!}$

- Örnek: Harfleri birbirinden farklı dört harfli kelime sayısı= $29!/25! = 29.28.27.26$

# Kombinasyon

- Burada/kombinasyonda saydığımız şey $n$ elemandan sırası önemli olmadan $k$ elemanı seçme şeklidir.

- Sırası önemli olmadığı için genel olarak kombinasyon sonucu permütasyona göre daha küçük olur.

- Çünkü örnegin, A,B,C kümesinden iki elemanlı seçimler için, permütasyonda sayacağımız şeyler AB,BA,AC,CA,BC,CB iken kombinasyonda A ve B, A ve C, B ve C olur.

# Kombinasyon

- Kombinasyon sayısını hesaplamak için daha önce çıkardığımız permütasyon sayısını kullanabiliriz.

- Permütasyon sayısını her $k$li grubun kendi içinde mümkün olan sıralama sayısına bölersek kombinasyon sayısını elde ederiz.

- Dolayısı ile kombinasyon şu şekilde hesaplanı ve gösterilir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## Örnek

TATTOO kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek kaç farklı kelime (harf sırası) oluşturulabilir? Mevcut harfler ile doldurulacak 6 pozisyon vardır. Bütün yerleştirmeler 3 büyüklüğündeki T grubundan, 1 büyüklüğündeki A grubundan, 2 büyüklüğündeki O grubundan seçilmektedir. Bunlara göre istenen değer:

$$\frac{6!}{1!2!3!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*1*2*1*2*3} = 60$$

Cevabı alternatif bir yöntem ile çözmek öğretici olacaktır. TATTOO kelimesini $T_1AT_2T_3O_1O_2$ şeklinde 6 farklı eleman ile uğraşıyormuş gibi yazalım. Bu 6 öğe 6! değişik biçimde tekrardan düzenlenebilir. Fakat $T_1$, $T_2$ ve $T_3$'ün 3! olası permütasyonu ve $O_1$ ve $O_2$'nin 2! olası permütasyonu aynı kelimeleri oluşturur. Altindisler çıkarıldığında 6!/(3!2!) değişik kelime kalır.

# Örnek

4 yüksek lisans ve 12 lisans öğrencilerini oluştuğu bir sınıf rastgele 4 farklı gruba bölünmüştür. Her bir grupta 1 adet yüksek lisans öğrencisi bulunma olasılığı nedir? Bu soru Örnek 1.11 ile aynıdır fakat burada cevabı sayma argümanını kullanarak elde edeceğiz.

Öncelikle örnek uzayını belirleriz. Tipik çıktı 16 öğrenciyi belli bir bölme ile 4 gruba ayırmaktır. Rastgele sözüyle bütün bölmelerin eşit olasılıkla yapıldığını anlarız, böylece olasılık sorusu hesaplamalardan birine düşürülebilir.

Önceki tartışmaya göre

$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!4!4!4!}$$

değişik bölme vardır ve bu örnek uzayının boyutudur.

Şimdi her bir gruba 1 adet yüksek lisans öğrencisi düşme olayına odaklanalım. Bu çıktı 2 aşamada gerçekleştirilir:

(a) 4 yüksek lisans öğrencisi her bir gruba dağıtılır; ilk yüksek lisans öğrencisi için 4 olası grup vardır, ikincisi için 3 adet, üçüncüsü için 2 adet. Yani 4! sayıda seçim vardır.

(b) Geri kalan 12 lisans öğrencisi 4 gruba dağıtılır (her grup için 3 öğrenci). Bu

$$\binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{3!3!3!3!}$$

değişik yolla yapılır.

Sayma Prensibine göre, istenilen olay

$$\frac{4!12!}{3!3!3!3!}$$

değişik şeklilde gerçekleşir. Bu olayın gerçekleşme olasılığı:

$$\frac{\frac{4!12!}{3!3!3!3!}}{\frac{16!}{4!4!4!4!}}.$$

Bazı hesaplamar sonucunda:

$$\frac{12 * 8 * 4}{15 * 14 * 13}$$