Rastgele değişken nedir?

- ŞİMDİYE kadar hep, kümelerden ve bu kümelerin alt kümelerinden (yani olaylar)dan bahsettik

- Bu kümelerin elemanları sayısal olmak zorunda değildi. Örneğin, yazı tura, kız erkek olma vs gibi herhangi bir çıktı olabilirdi

- Bu sayı veya değil deneyin her bir çıktısına sayısal bir değer verdiğimizde, o değer artık rastgele bir değişken olmuş oluyor

- Yani rastgele değişken (RD), örnek uzaydaki her elemana verilmiş olan sayısal (reel) bir değerdir.

Rastgele Değişken Örnekleri

- Havanın 10 derece olması bir olay, havanın sıcaklığı ise bir rastgele değişkendir (çünkü her hava sıcaklığı olayı için sayısal bir değeri vardır.

- İki zar atıyorsak, birinci zarın değeri, birinci zarın değeri eksi ikinci zarın değeri, iki zarın toplamının kübü gibi değişkenler hep rastgele değişkenlerdir

- Bir para atıyoruz, tura gelirse 20 TL kazanıyoruz, yazı gelirse 10 TL kaybediyoruz, 5 atış sonunda kazanacağımız para bir RDdir.

- Rastgele değişkenler kesikli de olabilir (sadece belli değerler alabilir/örneğin öğrenci sayısı), sürekli de olablir (örneği sıcaklık).

Kesikli Rastgele Değişkenler ve Olasılık Kütle Fonksiyonu (Probabilitiy Mass Function)

- Kesikli RD'lerin her alacağı değer için olasılıkları bir araya getirdiğimizde ortaya çıkan fonksiyona, yani kesikli RDlerin değerleri ve bunların olasılıklarından oluşan fonksiyona, olasılık kütle fonksiyonu (OKF) veya probabilitiy mass function (PMF) denir.

- OKF $p_X(x)$ şeklinde gösterilir dolayısı ile $p_X(x) = P(X = x)$ olur.

- Notasyon: Burada X RD'nin ismi, x ise değeridir; yani kullanım örneğin $p_X(4)$ şeklindedir bu da $P(X = 4)$'e eşittir.

- $p_X(x)$ değerlerinini her biri olasılık değerleri olduğundan $p_X(x) = 1$ olur, yani OKF'nin bütün RD değerleri için toplamı 1'e eşittir.

Sürekli Rastgele Değişkenler ve Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Probability Density Function)

- Daha önce örneklerde de gördüğümüz gibi, elimizdeki problemin doğası sürekli ise, tek bir değer için olasılıklar sıfır olur. Çünkü sürekli problemlerde, genelde evrensel kümenin eleman sayısı sonsuz, tekr bir ya da sayılı sayıda elemana sahip bir alt küme ya da olayın eleman sayısı sonludur. Dolayısı ile bölünce sıfır çıkar.

- Bu durumda az önce kesikli RD'ler için tanımladığımız OKF'ye benzer bir fonksiyonu sürekli RD'ler için tanımlamak anlamlı olmaz, çünkü bu durumda olaslıkların herbiri sıfırdır.

Sürekli Rastgele Değişkenler ve Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Probability Density Function)

- Bu durumu çözüme kavuşturmak için, sürekli RD'ler için olasılıkları hesaplayabilmemizi sağlayan başka tür bir fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$P(X\epsilon b) = \int_B f_X(x)dx$$

- Buradaki $f_X(x)$ fonksiyonuna olasılık yoğunluk fonksiyonu (OYF)/probabilit density function (PDF) denir

- Kesikli durumun aksine burada $f_X(x)$ fonksiyonunun değerleri değil, $f_X(x)$ fonksiyonunun belli bir aralık ya da aralıklar için integrali olasılık değerlerini verir

OKF ve OYF örnekleri

- Bir zar atılırsa, zarın değerini bir RD (X) olarak tanımlayabiliriz. Bu durumda zar değerlerine karşılık gelen olasılıklar bir OKF oluşturur: $p_X(1) = 1/6, p_X(2) = 1/6, p_X(3) = 1/6, p_X(4) = 1/6, p_X(5) = 1/6, p_X(6) = 1/6$

- Zar değerleri kesikli olduğu için OKF tanımladık ve kullanık, ve OKF'nin her değeri bir olasılık aynı zamanda

- Öte yandan 0 ile 0.5 arasında rastgele bir reel sayı da başka bir RD olarak tanımlanabilir. Burdaki RD sürekli olur

- Bu durumda $f_X(x)$ şeklinde bir OYF'den bahsedebiliriz, $f_X(x)$ in değerleri olasılıkları vermez, belli aralıklar için integralleri olasılıkları verir

OKF ve OYF örnekleri

- Peki $f_X(x)$'i nasıl hesaplarız/buluruz/tanımlarız. Evrensel küme için toplam olasılık bir olmalı. Ve her reel sayının olasılığının eşit olduğunu varsayarsak

$$\int_0^0 .5 f_X(x)dx = \int_0^0 .5\alpha dx = 1$$

- Buradan $\alpha = 2$ çıkar

- Yani 0 ile 0.5 arasında rastgele eşit olasılığa sahip bir reel sayı deneyinde, $f_X(x) = 2, x\epsilon[0, 0.5]; 0\ diger\ durumlarda$ olur

- Görüldüğü gibi $f_X(x)$ değeri birden büyük olabiliyor. Gayet doğal çünkü $f_X(x)$ değerleri olasılık değerleri değil!

- Ama evrensel kümede veya bir alt kümesinde $f_X(x)$'in integrali 1 veya daha küçük olmalı, çünkü bu integraller olasılık değerleridir