Birden Fazla RDnin Bileşik Olasılık Fonksiyonları

- Birden fazla $x_1, x_2, ..., x_n$ gibi RDlerimiz olsun.

- Bunların bileşik olasılık fonksiyonları kesikli ve rastgele RDler için sırasıyla şu şekilde tanımlanır

$$p_{X_1,...,X_n}(x_1, ...x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_n)$$

$$\int_{B_1} ... \int_{B_n} f_{X_1,...X_n}(x_1, ...x_n)\, dx_1 ... dx_n = P(x_1 \epsilon B_1, x_2 \epsilon B_2, ..., x_n \epsilon B_n)$$

- Burada birden fazla RD'ye aynı anda bakmış oluyoruz

- Örneğin bir şehirdeki sıcaklık, nem oranı, ve yükselti gibi üç RD'ye birden bakıyoruz.

Marginal PDF/PMF's - Marjinal OYF ve OKF'ler

- Verilmiş olan bir bileşik olasılık fonksiyonundan herhangi bir olasılık fonksiyonu şu şekilde hesaplanır.

- Örneğin iki RDmiz olsun X ve Y. Bunların bileşik OKFsi ise $p_{X,Y}(x, y)$ şeklinde yazılabilir.

- Böyle bir durumda tek bir RD, örneğin Xin olasılık fonksiyonu şu şekilde hesaplanabilir:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

Marginal PDF/PMF's - Marjinal OYF ve OKF'ler (Devam)

- Benzer şekilde sürekli rastgele değişkenler için şunu yazabiliriz

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)\, dy$$

- Yani verdiğimiz örnekten devam edersek, sıcaklık RD'si için olasılık fonksiyonunu, bütün nem ve bütün yükselti değerleri üzerinden (olasılıkları ile ağırlıklı şekilde) toplayarak bulabiliriz.

Birden fazla RD için Fonksiyonlar ve Beklenen Değer

- Nasıl tek bir RDnin fonksiyonu olabiliyorsa birden fazla RDnin de fonksiyonları olabilir

- Örneğin X, Y gibi iki tane RD'nin bir fonksiyonu $Z = g(X, Y)$ şekilde yazılabilir

- Beklenen değer de tek bir RD için tanımladığımıza benzer şekilde tanımlanır

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \int \int g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

- Örneğin bir elips için iki eksen uzunluğu RDler olan X ve Y olsun. Elipsin alanı olan $Z = g(X, Y) = \pi XY$ başka bir RD olur.

Bir RDyi Bir Olaya/Event'e göre Koşullama

- Bir olaya göre koşullanmış olasılık fonksiyonları (OKF ve OYF) şu şekilde tanımlanır

$$p_{X/A}(x) = P(X = x/A) = \frac{P([X = x] \cap A)}{P(A)}$$

$$\int_B f_{X/A}(x)\, dx = P(X \epsilon B/A) = \frac{P([X \epsilon B] \cap A)}{P(A)}$$

- Örneğin dünyadaki herhangi bir noktanın genel sıcaklığı RD'si (X) ele alınacak olursa, A olayı bu noktanın İstanbul'da olması olsun. Bu durumda $p_{X/A}(x)$ İstanbuldaki hava sıcaklığı RD'sinini OKF'si olur.

Bir RDyi Bir Olaya/Event'e göre Koşullama (Devam)

- Eğer A olayını $x\epsilon A$ şeklinde ifade edebiliyorsak

$$\int_B f_{X/A}(x)\,dx = \frac{P([X\epsilon B]\cap A)}{P(A)} = \frac{P((X\epsilon A)\cap B)}{P(A)} = \frac{\int_{A\cap B} f_X(x)\,dx}{P(A)}$$

- Buradan şu sonuca ulaşırız

$$f_{X/A}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f_X(x)}{P(x\epsilon A)}, & x\epsilon A \\ 0, & \text{d.d.} \end{array} \right\}$$

Bir RDyi Başka Bir RD'ye göre Koşullama

- Bir RDnin diğer RDye göre koşullu olasılıkları kesikli ve sürekli RDler için sırasıyla şu şekilde tanımlanır.

$$p_{X/Y}(x/y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

- Örneğin X sıcaklık, Y ise nem olsun. Burada $p_{X/Y}(x/y)$ her nem oranına koşullu olarak sıcaklığın OKF'sini verir. Daha açıkca, % 10 nem için sıcaklık OKF'si; %20 nem için sıcaklık OKF'si ....vb

- Bu ilişkilerden şu basit ve yararlı çıkarımlar yapılabilir

$$p_{X/Y}(x/y) = p_Y(y).p_{X/Y}(x/y) = p_X(x).p_{Y/X}(y/x)$$

$$f_{X/Y}(x/y) = f_Y(y).f_{X/Y}(x/y) = f_X(x).f_{Y/X}(y/x)$$

Koşullu Beklenen Değer - Conditional Expectation

- Koşullu olasılık fonksiyonlarını kullanarak elde ettiğimiz beklenen değerlere koşullu beklenen değer denir.

- Bir olaya koşullu beklenen değer kesikli ve sürekli RDler için sırasıyla şu şekilde verilir

$$\mathrm{E}[g(X)/A] = \sum_x g(x) p_{X/A}(x)$$

$$\mathrm{E}[g(X)/A] = \int g(x) f_{X/A}(x)\, dx$$

- Örnek: İstanbuldaki ortalama sıcaklık gibi.

Koşullu Beklenen Değer - Conditional Expectation (Devam)

- Bir RD'ye koşullu beklenen değerler ise:

$$\mathrm{E}[g(X)/Y] = \sum_x g(x) p_{X/Y}(x/y)$$

$$\mathrm{E}[g(X)/Y] = \int g(x) f_{X/Y}(x/y)\, dx$$

- Örnek:Nem oranı

Toplam Beklenen Değer Kuralı - Total Expectation Rule

- Bu kural/formülle (toplam olasılık kuralına benzer şekilde) x gibi bir RD'nin beklenen değeri, diğer olaylar veya RD'lere koşullu beklenen değerler kullanılarak hesaplanır.

- Kuralı ispat etmek/çıkarmak için olasılık fonksiyonunu toplam olasılık kuralını kullanarak yazalım.

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) p_{x/A_i}(x/A_i)$$

Toplam Beklenen Değer Kuralı - Total Expectation Rule (Devam)

- Beklenen değer formülünde $p_X(x)$ yerine bunu yazarsak

$$\mathsf{E}[X] = \sum_x x \sum_{i=1}^{n} P(A_i) p_{x/A_i}(x/A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_x x p_{x/A_i}(x/A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \mathsf{E}[X/A_i]$$

- Örneğin herhangi bir rastgele noktadaki ortalama sıcaklık için bütün şehirlerdekki ortalama sıcaklıkları kullanabiliriz.

Toplam Beklenen Değer Kuralı - Total Expectation Rule (Devam)

- Benzer şekilde kesikli RD'ler için

$$\mathsf{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathsf{E}[X/Y]$$

ve sürekli RD'ler için

$$\mathsf{E}[X] = \int f_Y(y)\mathsf{E}[X/Y]\,dy$$

olarak ispat edilebilir.

- Örneğin, ortalama sıcaklığı bulmak için bütün nem değerlerine göre olan sıcaklıkları parça parça kullanabiliriz.

Örnek

Bir öğrenci belli bir testi maksimum n defa geçene kadar tekrar tekrar yapacak, her seferinde geçme olasılığı önceki denemelerinden bağımsız olarak p'dir. Öğrencinin testi geçmesine bağımlı olarak teste girme sayısının PMF'i nedir?

Öğrencinin testi geçme olasılığına A diyelim (en fazla n deneme ile). Bir X rastgele değişkeni tanımlayalım. X sonsuz sayıda deneme hakkı verilirse gerekli olan deneme sayısıdır. O halde X p parametreli bir geometrik rastgele değişkendir, ve $A = \{X \leq n\}$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{m=1}^{n} (1-p)^{m-1} p,$$

ve

$$p_{X|A}(k) = \begin{cases} \frac{(1-p)^{k-1}p}{\sum_{m=1}^{n}(1-p)^{m-1}p} & \text{if } k = 1, 2, ..., n. \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bileşik OKF Örneği

Profesör May B. Right derste sık sık yanlış şeyler söyler, ve öğrencilerinin sorularını diğer sorulardan bağımsız olarak 1/4 olasılıkla yanlış cevaplar. May'in derslerinde eşit olasılıkla 0, 1 veya 2 soru sorulur. X ve Y sırasıyla May'e dersde sorulan soru sayısı ve May'in yanlış cevapladığı soru sayısıdır. Bileşik PMF'i ($p_{X,Y}(x,y)$) oluşturmak için bütün x ve y değerlerini kombinasyonları için $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$ olasılığını hesaplamamız lazım. Bu deneyin ve çarpma kuralının ardışık açıklaması kullanılarak yapılır. Örneğin bir sorunun sorulduğu ve yanlış cevaplandığı durum için

$$p_{X,Y}(1,1) = p_X(x)p_{Y|X}(y,x) = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Bütün x, y değerleri için benzer şekilde hesaplama yapılır ve PMF iki boyutlu bi tablo ile gösterilebilir.

Bileşik OKF Örneği (Devam)

Bu herhangi bir olayın olasılığını hesaplamak için de kullanılabilir. Örneğin

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\text{en az 1 yanlış cevap}) &= p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,2) \\ &= \frac{4}{48} + \frac{6}{48} + \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

Örnek

Bilgisayar ağı üzerinden mesaj gönderen bir verici düşünün. İki rastgele değişken tanımlayalım:

$$X\text{: mesajın iletim süresi,} \qquad Y\text{: mesajın uzunluğu}$$

İletim süresinin ve mesaj uzunluğunun PMF'lerini bilmekteyiz. Biz mesajın iletim zamanının (koşulsuz) PMF'ini bulmak istiyoruz.

Mesaj uzunluğu 2 olası değer almaktadır: 5/6 olasılıkla $y = 10^2$ byte ve 1/6 olasılıkla $y = 10^4$ byte.Mesajın uzunluğunun olasılık fonksiyonu ise şu şekildedir:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 5/6 & \text{if } y = 10^2 \\ 1/6, & \text{if } y = 10^4 \end{cases}$$

Mesajın iletim süresi X'in Y uzunluğuna bağlı olduğunu görebiliyoruz. İletim süresi 1/2 olasılıkla $10^{-4}Y$ saniye, 1/3 olasılıkla $10^{-3}Y$ saniye ve 1/6 olasılıkla $10^{-2}Y$ saniyedir. Böylece:

Örnek Devam

$$p_{X|Y}(x|10^2) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } x = 10^{-2}, \\ 1/3 & \text{if } x = 10^{-1}, \\ 1/6 & \text{if } x = 1. \end{cases} \qquad p_{X|Y}(x|10^4) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } x = 1, \\ 1/3 & \text{if } x = 10, \\ 1/6 & \text{if } x = 100. \end{cases}$$

X'in PMF'ini bulmak için toplam olasılık formülünü kullanırız:

$$p_X(x) = \sum_y p_Y(y) p_{X|Y}(x, y).$$

Öyleyse:

$$p_X(10^{-2}) = \frac{5}{6} * \frac{1}{2}, \qquad p_X(10^{-1}) = \frac{5}{6} * \frac{1}{3}, \qquad p_X(1) = \frac{5}{6} * \frac{1}{6} + \frac{1}{6} * \frac{1}{2},$$

$$p_X(10) = \frac{1}{6} * \frac{1}{3}, \qquad p_X(100) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6}.$$