Kümülatif Dağılım Fonksiyonları

- Herhangi bir rastgele değişken için kümülatif dağılım fonksiyonu/cumulative distribution function (KDF/CDF) şu şekilde tanımlanır.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\, dx'$$

- Sürekli olan içinse

$$P_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x'=-\infty}^{x} p_X(x')$$

- KDF bir olasılık olduğundan değeri hep sıfır ile bir arasındadır.

- Ayrıca tanımdan dolayı -sonsuz'da sıfır, +sonsuz'da ise bir değerini alır.

- KDF ayrıca hep monoton artan veya sabit bir fonksiyoundur, yani artan x değeri ile hiçbir şekilde azalması mümkün değildir.

- Verilmiş olan bir KDF için OYF türev işlemi ile bulunur. Yani:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Çıkarılmış Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

- Kumulatif dağılım fonksiyonlarının en önemli kullanım alanlarından biri "çıkarılmış olasılık yoğunluk fonksiyonu (derived PDF)" yönteminde ortaya çıkar

- Çıkarılmış OYF Metodu, OYF'si verilmilş bir RD'nin bir fonksiyonu olan başka bir RD verildiğinde, bu yeni RD'nin OYF'sini hesaplamanın sistematik bir yöntemidir.

- Yani çıkarılmış OYf/derived PDF, bir x RDi ve OYF'si $f_X(x)$ verilmiş olduğunda, bize verilen $y = g(x)$ için y'nin OYFsi $f_Y(y)$'yi hesaplamanın yöntemidir.

Çıkarılmış Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları Aşamaları

- Çıkarılmış OYF Yönteminini üç aşaması vardır ve şu şekilde açıklanabilir.

- Problem: x ve $f_X(x)$ verilmiş olsun; $y_g(x)$ (örneğin $y = \pi x^2$ veya $y = \sin(x)$ vb) için $f_Y(y)$ nedir?

- Aşama 1: $f_X(x)$ kullanılarak $F_X(x)$ hesaplanır: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,dx'$

- Aşama 2: $y = g(x)$ bağıntısı kullanılarak $F_Y(y)$ hesaplanır: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y)$. Burada $g(x)$'in formuna göre x yalnız bırakılarak $F_Y(y)$, $F_X(x)$ kullanılarak yazılır.

- Aşama 3: $F_Y(y)$'nin türevi alınarak ($F_X(x)$ de kullanılarak) $f_Y(y)$ bulunur.

- Bu konu ile ilgili birçok örnek derste çözülmüştür.

Örnek 4.2

John Slow Boston'dan New York'a 180 millik yolu sabit bir hızla gitmektedir. John'un hızı 30 ve 60 mil/saat arasında düzgün dağılımlıdır. Seyahat süresinin PDF'i nedir?

X'i hız $y = g(X)$ seyahat süresi olsun:

$$g(X) = \frac{180}{X}.$$

Y'nin CDF'ini bulmak için şunu hesaplamalıyız

$$\mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(\frac{180}{X} \leq y) = \mathbf{P}(\frac{180}{y} \leq X).$$

X'in verilen PDF'ini kullanırız

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{eğer } 30 \leq x \leq 60, \\ 0 & \text{diğer türlü,} \end{cases}$$

ve denk gelen CDF

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x \leq 30, \\ (x-30)/30, & \text{eğer } 30 \leq x \leq 60, \\ 0, & \text{eğer } 60 \leq x. \end{cases}$$

Böylece,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbf{P}(\frac{180}{y} \leq X) \\
&= 1 - F_X(\frac{180}{y}) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{eğer } y \leq 180/60, \\ 1 - \frac{\frac{180}{y} - 30}{30}, & \text{eğer } 180/60 \leq y \leq 180/30, \\ 0, & \text{eğer } 180/30 \leq y, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{eğer } y \leq 3, \\ 1 - (6/y), & \text{eğer } 3 \leq y \leq 6, \\ 0, & \text{eğer } 6 \leq y. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Türevini alarak Y'nin PDF'ini elde ederiz:

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } y \leq 3, \\ 6/y^2, & \text{eğer } 3 \leq y \leq 6, \\ 0, & \text{eğer } 6 \leq y. \end{cases}
$$

Örnek 4.3

$Y = g(X) = X^2$ ve X rastgele değişkenin bilinen bir PDF'i var. $y \geq 0$ şartını sağlayan herhangi bir y için:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbf{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbf{P}(X^2 \leq y) \\ &= \mathbf{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

türev alınıp, zincir kuralı uygulanırsa

$$F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

Örnek 4.5

X beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olan bir normal rastgele değişkendir. $Y = aX + b$ ve a ve b değerleri skalardır, $a \neq 0$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Böylece:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\{-\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2 /2\sigma^2\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} exp\left\{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

Bunu beklenen değeri $a\mu + b$ ve varyansı $a^2\sigma^2$ olan normal PDF olarak görürüz. Özellikle, Y bir normal rastgele değişkendir.

Örnek 4.7

İki okçu hedefe ok atmaktadırlar. Atışların hedefin merkezine olan uzaklığı diğer atışlardan bağımsız olarak 0 ile 1 arasında düzgün dağılmaktadır. Kaybeden atışın merkezden uzaklığının PDF'i nedir?

X ve Y birinci ve ikinci atışın merkezden olan uzaklığı, Z ise kaybeden atışın uzaklığı olsun:

$$Z = max\{X, Y\}.$$

X ve Y'nin [0,1] aralığında düzgün dağıldığını bilmekteyiz, böylece $z \in [0, 1]$ ve

$$\mathbf{P}(X \leq z) = \mathbf{P}(Y \leq z) = z$$

X ve Y'nin bağımsızlık özelliğini kullanarak bütün $z \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} F_z(z) &= \mathbf{P}(max\{X,Y\} \leq z) \\ &= \mathbf{P}(X \leq z, Y \leq z) \\ &= \mathbf{P}(X \leq z)\mathbf{P}(Y \leq z) \\ &= z^2. \end{aligned}$$

Türevini alırsak:

$$f_Z(z) \begin{cases} 2z, & \text{eğer} 0 \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{diğer türlü} \end{cases}$$

Bağımsız Rastgele Değişkenlerin Toplamı - Evrişim

Şimdi iki rastgele değişkenli Z fonksiyonunun önemli bir örneğini düşüneceğiz. $Z = X + Y$ ve X ve Y bağımsızdır. Başlangıç olarak X ve Y'nin ayrık olduğu durumdaki PMF formülünü çıkartacağız.

$Z = X + Y$ iken X ve Y p_X ve p_Y PMF değerlerine sahip tam sayı değeri alan rastgele değişken olsun. Herhangi bir z değeri için,

$$\begin{aligned} p_z(z) &= \mathbf{P}(X + Y = z) \\ &= \sum_{\{(x,y)|x+y=z\}} \mathbf{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \mathbf{P}(X = x, Y = z - x) \\ &= \sum_x p_X(x) p_Y(z - x). \end{aligned}$$

p_Z PMF'i X ve Y'nin PMF'inin evrişimi olarak çağrılır.

Şimdi X ve Y'i f_X ve f_Y PDF değerlerine sahip devamlı bağımsız rastgele değişken olarak düşünelim. $Z = X + Y$'nin PDF'ini bulalım. Bu amaç için öncelikle X ve Z'nin birleşik PDF'ini bulup, türevini alarak Z'nin PDF'ini elde etmeliyiz.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z \leq z | X = x) &= \mathbf{P}(X + Y \leq z | X = x) \\
&= \mathbf{P}(x + Y \leq z | X = x) \\
&= \mathbf{P}(x + Y \leq z) \\
&= \mathbf{P}(Y \leq z - x).
\end{aligned}$$

3. eşitsizlik X ve Y'nin bağımsızlığından gelmektedir. İki tarafında z'ye göre türevini alırsak, $f_{Z|X}(z|x) = f_Y(z - x)$ olduğunu görürüz. Çarpma kuralını kullanarak:

$$f_{X,Z}(x, z) = f_X(x) f_{Z|X}(z|x) = f_X(x) f_Y(z - x).$$

Son olarak:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Z}(x,z)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx.$$

Bu formül ayrık durumundaki ile tamamen paraleldir, sadece toplam yerine integral geçmiş ve PMF yerine PDF kullanılmıştır.

Kovaryans (Covariance) ve Korelasyon Katsayısı (Correlation Coefficient)

- İki X ve Y gibi RD'nin kovaryansı şu şekilde hesaplanır:

$$\text{Cov}(x, y) = \text{E}[X - \mu_x]\text{E}[Y - \mu_y]$$

- Kovaryans iki RD'nin birbirini etkileme/birbiri ile ilişkisi miktarını ifade eder.

- Korelasyon Katsayısı (Correlation Coefficient) ise şu şekilde tanımlanır:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

- Korelasyon katsayısının kovaryanstan farkı, hep 0 ile 1 arasında bir sayı verecek şekilde normalize edilmiş olmasıdır.

- Böylece verilmiş olan bir korelasyon katsayısına bakarak, 0 veya 1'e yakınlığını baz alabilir ve ili RD arasındaki ilinti ya da ilintisizliğin ne kadar kuvvetli olduğunu anlayabiliriz.

- Kovaryansı sıfır olan iki RD'ye "ilintisiz" denir. Bağımsız olan iiki RD kesinlikle ilintisizdir ama tersi doğru değildir.

Örnek 4.15

Bölüm 2.5'de tartıştığımız şapka problemini düşünün, n kişinin şapkalarını bir kutuya attığı ve kutudan rastgele bir şapka çektiği problem. Kendi şapkasını çeken insan sayısının, X, varyansını bulalım.

$$X = X_1 + ... + X_n,$$

X_i eğer i'ninci insan kendi şapkasını çekerse 1, başkasının şapkasını çekerse 0 değeri almaktadır. X_i $p = \mathbf{P}(X_i = 1) = 1/n$ parametreli Bernoulli'dir. Bu sebeple:

$$E[X_i] = \frac{1}{n}, \quad var(X_i) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$i \neq j$ değerleri için,

$$
\begin{aligned}
cov(X_i, X_j) &= \mathbf{E}[X_i X_j] - \mathbf{E}[X_i]\mathbf{E}[X_j] \\
&= \mathbf{P}(X_i = 1 \text{ ve } X_j = 1) - \frac{1}{n}.\frac{1}{n} \\
&= \mathbf{P}(X_i = 1)\mathbf{P}(X_j = 1 | X_i = 1) - \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n}.\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)}
\end{aligned}
$$

Bu sebeple:

$$
\begin{aligned}
var(X) &= var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \sum_{\{(i,j)|i\neq j\}}^{n} cov(X_i, X_j) \\
&= n.\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + n(n-1).\frac{1}{n^2(n-1)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Yenilemeli Beklenen Değer ve Varyans

- Birbirine bağlı iki rastgele değişkenin olduğu durumlarda, beklenen değer ve varyans şu şekilde iki aşamada hesaplanabilir.

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}_X[X/Y]]$$

- Burada ilk beklenen değer verilmiş olan bir Y için Xe göre, ikinci beklenen değer ise Yye göredir.

- Benzer şekilde varyans da şöyle hesaplanabilir.

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X/Y)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[X/Y])$$

- Bu iki formülde amaç başka bir RD olan Yye bağlı olduğu için Xin beklenen değeri ve varyansını direkt olarak hesaplayamadığımız durumlarda problemi ikiye bölmektir. İlk kısımde Y sabit kabul edilir, ikinci kısımda ise Y üzerinden hesaplamalar yapılır.

Örnek

- l uzunluğunda bir çubuğu düzgün dağılımlı olarak rastgele biryerinden kırıyoruz. Sol elimizde kalan parçanın uzunluğuna Y diyelim. Sonra bu kalan çubuğu tekrar düzgün dağılımlı olarak kırıyoruz. İkinci kırmadan sonra en son elimizde kalan parçanın uzunluğu ise X olsun. Xin beklenen değerş ve varyansı nedir?

- Burada beklenen değer ve varyans için basit tanım formüllerini kullanarak hesap yapamıyoruz, çünkü X başka bir RD olan Yye bağlı. O zaman bir önceki slide'da yer alan yaklaşımı ve formülleri kullanmamız gerekiyor

$$\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}_Y[\mathsf{E}_X[X/Y] = \mathsf{E}_Y[Y/2] = l/4$$

- Burada $\mathsf{E}_X[X/Y] = Y/2$ oldu çünkü sabir bir verilmiş Y değeri için ortalama $Y/2$dir (düzgün dağılım olduğu için).

- Daha sonra ikinci beklenen değeri Yye göre alıyoruz: $\mathrm{E}_Y[Y/2] = 1/2 \times E[Y] = 1/2 \times l/2 = l/4$

- Varyans ise şöyle hesaplanıyor:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X/Y)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[X/Y]) = \mathrm{E}[Y^2/12] + \mathrm{Var}(Y/2) = l^2/36 + l^2/$$