Dönüşümler/Moment Üreten Fonksiyonlar

- Herhangi bir rastgele değişken için OYF'ler için şöyle bir dönüşüm kullanışlı olduğundan özel biri isimle (moment üreten fonksiyonlar) tanımlanmıştır

$$M_X(s) = \mathsf{E}[e^{sX}] = \int e^{sX} f_X(x)\ dx$$

- Verilmiş olan bir moment üreten fonksiyonundan OYFye geçiş genel olarak tablolar kullanılarak yapılır. Yani önceden hesaplanmış OYF/Moment Üreten Fonksiyonu çiftleri kullanılır.

- Bu dönüşüme moment üreten fonksiyonu denir çünkü, n. dereceden moment bu dönüşüm fonksiyonu kullanılarak şu şekilde kolayca hesaplanabilir:

$$\mathsf{E}[X^n] = \frac{d^n M_X(s)}{ds^n}|_{s=0}$$

- Bu moment üreten fonksiyon veya dönüşümün başka bir pratik kullanım alanı ise iki bağımsız RD toplandığında ortaya çıkar.

- İki bağımsız X ve Y RD için toplamları başka bir RD olarak tanımlanmış olsun: $Z = X + Y$

- Bu durumda $M_Z(s) = \mathrm{E}[e^{sZ}] = \mathrm{E}[e^{s(X+Y)}] = \mathrm{E}[e^{sX}].\mathrm{E}[e^{sY}] = M_X(s).M_Y(s)$

- Yani iki bağımsız RDnin toplamlarının dönüşümü ayrı ayrı RDlerin dönüşümlerinin çarpımı ile bulunur.

Örnek 4.24

X λ parametreli bir üssel rastgele değişken olsun;

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Öyleyse:

$$\begin{aligned} M(s) &= \lambda \int_0^\infty e^{sx} e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{(s-\lambda)x} dx \\ &= \lambda \left. \frac{e^{(s-\lambda)x}}{s-\lambda} \right|_0^\infty \quad \text{(eğer } s < \lambda) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - s}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki $M(s)$'in hesaplaması ve formülü eğer $e^{(s-\lambda)x}$ integrandı x artarken azalırsa doğrudur, yani sadece $s < \lambda$ durumu için. Diğer türlü integral sonsuza gider.

Örnek 4.25

$M_X(s)$ X rastgele değişkeni ile ilişkili bir dönüşüm olsun. Yeni bir $Y = 2X + 3$ rastgele değişkeni düşünün.

$$M_Y(s) = \mathbf{E}[e^{s(aX+b)}] = e^{sb}\mathbf{E}[e^{saX}] = e^{sb}M_X(sa).$$

Örneğin eğer X $\lambda = 1$ parametreli üssel ise, $M_X(s) = 1/(1-s)$ olur, ve $Y = 2X + 3$ ise:

$$M_Y(s) = e^{3s}\frac{1}{1-2s}.$$

Örnek 4.26

X, μ beklenen değer ve σ^2 varyans değerine sahip bir normal rastgele değişken olsun. Denk gelen dönüşümü hesaplamak için, öncelikle Y standart normal rastgele değişkeninin ($\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$) özel durumunu düşünelim, sonra bir önceki örnekte elde edilen formülü kullanalım. standart normalin PDF'i:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},$$

ve ilişkili dönüşüm:

$$
\begin{aligned}
M_Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} e^{sy} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2/2)+sy} dy \\
&= e^{s^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2/2)+sy-(s^2/2)} dy \\
&= e^{s^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-s)^2/2} dy \\
&= e^{s^2/2},
\end{aligned}
$$

Son eşitlik beklenen değer s ve birim varyanslı normal PDF'in normalleştirme özelliği kullanılarak elde edildi.

μ beklenen değer ve σ^2 varyans değerine sahip bir genel normal rastgele değişken bir standart normalin doğrusal dönüşümleri ile elde edildi.

$$X = \sigma Y + \mu.$$

Yukarıda doğrulandığı gibi standart normal ile ilişkili dönüşüm $M_Y(s) = e^{s^2/2}$'dir. Örnek 4.25'deki formül uygulanarak:

$$M_X(s) = e^{s\mu} M_Y(s\sigma) = e^{(\sigma^2 s^2/2)+\mu s}.$$

Örnek 4.29

X rastgele değişkeli ile ilişkili dönüşüm:

$$M(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s},$$

p [0,1] arasında sabit bir sayıdır. X'in dağılımını bulmak itiyoruz. Geometrik serilerin formülünü hatırlayalım:

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + ...,$$

$|a| < 1$ için her zaman doğrudur. Formülü $\alpha = (1-p)e^s$ ile kullanırız ve s 0'a yeteri kadar yakın ise $(1-p)e^s < 1$'dir. Buradan,

$$M(s) = pe^s(1 + (1-p)e^s + (1-p)^2e^{2s} + (1-p)^3e^{3s} + ...).$$

Önceki örnekteki gibi, bunun pozitif tamsayı değerleri alan ayrık rastgele değişken olduğunu çıkarmaktayız. $\mathbf{P}(X = k)$ olasılığı e^{ks} teriminin katsayıları okunarak bulunur. Özellikle $\mathbf{P}(X = 1) = p$, $\mathbf{P}(X = 2)p(1-p)$ ve

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, ...$$

Bunu p parametreli geometrik dağılım olarak hatırlamaktayız.

$$\frac{d}{ds}M(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s} + \frac{(1-p)pe^{2s}}{(1-(1-p)e^s)^2}.$$

$s = 0$ için, sağ taraf $1/p$'ye eşittir, bu da Chapter 2'de elde edilmiş $\mathbf{E}[X]$ formülü ile uyuşmaktadır.

Örnek 4.31

$X_1, ..., X_n$ ortak p parametreli bağımsız Bernoulli rastgele değişkeni olsun. Bütün i değerleri için:

$$M_{X_i}(s) = (1-p)e^{0s} + pe^{1s} = 1 - p + pe^s.$$

$Z = X_1 + ... + X_n$ rastgele değişkeni n ve p parametreleri ile binominaldir. İlişkili dönüşüm:

$$M_Z(s) = (1 - p + pe^s)^n.$$

Örnek 4.32

X ve Y λ ve μ beklenen değerlere sahip bağımsız Poisson rastgele değişkenleri olsun, ve $Z = X + Y$.

$$M_X(s) = e^{\lambda(e^s-1)}, \quad M_Y(s) = e^{\mu(e^s-1)},$$

ve

$$M_Z(s) = M_X(s)M_Y(s) = e^{\lambda(e^s-1)}e^{\mu(e^s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^s-1)}$$

Bu sebeple Z ile ilişkili dönüşüm beklenen değeri $\lambda + \mu$ olan bir Poisson rastgele değişkeni ile aynıdır. Dönüşümlerin özgünlüğünden dolayı Z beklenen değeri $\lambda + \mu$ olan bir Poisson'dur.

Limit Teoremleri: Markov Eşitsizliği

- Limit teoremleri OYF bilinmediği veya hesaplarının karmaşık olduğu durumlarda bazı olasılıklar için sınırlar koymakta faydalı olur.

- Örneğin X diye bir RDmiz olsun. Bu RDnin belli bir değerden büyük olma olasılığını tam olarak hesaplayamıyorsak, bu olasılık için bir üst limit koymak bizim için değerli bir bilgidir.

- Bu tarz yaklaşık değerleri ya da limitleri limit teoremleri sayesinde elde edebiliriz.

- Bunlardan ilki Markov Eşitsizliğidir.

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathsf{E}[X]}{a}$$

Markov Eşitsizliği: İspat

- İspatı şu şekilde yapılabilir:

- Y_a şeklinde şöyle bir RD olsun

$$Y_a = \begin{cases} 0, & X \leq a \\ a, & X \geq a \end{cases}$$

- Bu tanımla $Y_a \leq X$, her iki tarafın beklenen değerini alırsak: $\mathsf{E}[Y_a] \leq \mathsf{E}[X]$

- $\mathsf{E}[Y_a]$ beklenen değerin tanımıyla şöyle hesaplanabilir: $\mathsf{E}[Y_a] = a.P(Y_a = a) = a.P(X \geq a)$

- Buradan $a.P(X \geq a) \leq \mathsf{E}[X]$ ya da $P(X \geq a) \leq \frac{\mathsf{E}[X]}{a}$ eşitsizliğine ulaşılmış olur.

- Buradaki pratik değer, bir olasılık değeri üzerine sadece beklenen değer bilgisi ile (OYF bilinmeden) bir üst sınır konulabilmesindedir.

Chebyshev Eşitsizliği

- Chebyhev eşitsizliği bir RD'nin beklenen değerden uzak değerler alma ihtimali üzerüne bir üst sınır koyar:

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

- İspatı Markov Eşitsizliği kullanılarak basit bir şekilde yapılabilir.

- Markov Eşitsizliğinde X yerine $(X-\mu)^2$, a yerine de c^2 koyalım:

$$P((X-\mu)^2 \geq c^2) \leq \frac{\mathsf{E}[(X-\mu)^2]}{c^2}$$

- Buradan

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

sonucuna ulaşmış olduk.

Weak Law of Large Numbers/Büyük sayıların zayıf kanunu

- Weak Law of Large Numbers (WLLN), bir deneyi çok sayıda tekrarladığımızda, yani bir RDyi çok sayıda ölçtüğümüzde, bu ölçümlerin aritmetik ortalamasının, gerçek istatistiksel ortalamaya git gide yakınsadığın ifade eder.

- Matematiksel olarak

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \mu\right|\right) \geq \epsilon = P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

- İspatı tanımlanmış olan $M_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ için Chebyev eşitsizliğinini kullanılması ile yapılmış olur.

- E$[M_n] = n\mu/n = \mu$ ve Var$(M_n) = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$ kullanılarak Chebyshev eşitsizliğine ulaşılır.

Örnek 5.2

Örnek 5.1'deki gibi, X [0,4] arasında düzgün dağılımlı olsun. $|X-2| \geq 1$ olasılığına sınır oluşturmak için Chebyshec eşitsizliğini kullanalım. $\sigma^2 = 16/12 = 4/3$ ve

$$\mathbf{P}(|X-2| \geq 1) \leq \frac{4}{3},$$

fazla bilgi vermez.

Başka bir örnek olarak, X $\lambda = 1$ parametreli üssel dağılımlı olsun. Böylece, $\mathbf{E}[X] = var(X) = 1$ olur. $c > 1$ için Chebyshec eşitliğini kullanarak

$$\mathbf{P}(X \geq c) = \mathbf{P}(X - 1 \geq c - 1) \leq \mathbf{P}(|X-1| \geq c-1) \leq \frac{1}{(c-1)^2}.$$

Bu eşiktsizlik tam cevap olan $\mathbf{P}(X \geq c) = e^{-c}$'a göre ılımlı.

Örnek 5.9

Bir uçağa 100 paket yüklenmektedir, her bir paketin ağırlığı bağımsız rastgele değişkendir ve 5 ile 50 pound arasında düzgün dağılımlıdır. Toplam ağırlığın 3000 poundu geçme ihtimali nedir? Toplam ağırlığın CDF'ini ve istenen olasılığı hesaplamak kolay değildir, fakat merkez limit teoremi ile yaklaşık bir cevap bulunabilir.

$\mathbf{P}(S_{100} > 3000)$ değerini hesaplamak istiyoruz, S_{100} paketin toplam ağırlığıdır. Bir paketin beklenen değeri ve varyansı:

$$\mu = \frac{5+50}{2} = 27.5, \quad \sigma^2 = \frac{(50-5)^2}{12} = 168.75.$$

Normalleştirilmiş değeri hesaplarsak:

$$z = \frac{300 - 100 * 27.5}{\sqrt{168.75 * 100}} = \frac{250}{29.9} = 1.92,$$

ve standart normal tablosu kullanılarak:

$$\mathbf{P}(S_{100} \leq 3000) \approx \phi(1.92) = 0.9726$$

İstenen olasılık:

$$\mathbf{P}(S_{100} > 3000) = 1 - \mathbf{P}(S_{100} \leq 3000) \approx 1 - 0.9726 = 0.0274$$