Solutions #2

Problem 8. Bir satranç turnuvasında, 3 rakibin her biri ile oyun oynanıyor. Kim ile oynayacağının sırası oyuncu tarafından seçiliyor, ve oyuncu her bir oyuncuya karşı kazanma olasılığını biliyor. Oyuncunun iki oyunu kazandığında turnuvayı kazandığı biliniyor ve kazanma olasılığının maksimize edilmesi isteniyor.

Bunun için ikinci oyuncunun en zayıf olması, diğer ikisinin nasıl sıralandığının önemli olmamasının en optimal sonuç olduğunu göstermemiz isteniyor.

P_i : i'nci oyunda rakibini yenme olasılığı olsun.

2.nci oyuncuyu ve kalan iki oyundan herhangi birini kazanırsak turnuvayı kazanacağımız biliniyor.

Bu oyunda elimizde 3 durum oluyor (kazanma)

$$P_W = P_1 . P_2 . (1-P_3) + (1-P_1)P_2P_3 + P_1P_2P_3$$

Probability of winning; 1. Oyunda kazanma; 2. oyun kazanma; 3. oyun kayıp; 1. oyun kayıp; 2 ve 3 kazanma; 3 oyun kazanma

$$= P_1P_2 - P_1P_2P_3 + P_2P_3 - \cancel{P_1P_2P_3} + \cancel{P_1P_2P_3}$$

$$= P_2(P_1 + P_3 - P_1P_3) \; *$$

Aynı şekilde diğer iki alternatif için

$$P_{W_1} = P_1(P_2 + P_3 - P_2P_3) \; **$$

$$P_{W_3} = P_3(P_2 + P_1 - P_2P_1) \; ***$$

Kıyaslayalım

$$P_2(P_1 + P_3 - P_1P_3) \overset{?}{\geq} P_1(P_2 + P_3 - P_2P_3) \quad (* \geq **)$$

$$P_1P_2 + P_2P_3 - P_1P_2P_3 \geq P_1P_2 + P_1P_3 - P_1P_2P_3$$

$$\boxed{P_2 \geq P_1} \checkmark$$

$$P_2(P_1 + P_3 - P_1P_3) \overset{?}{\geq} P_3(P_2 + P_1 - P_2P_1) \quad (* \geq ***)$$

$$P_2P_1 + P_2P_3 - P_2P_1P_3 \geq P_3P_2 + P_3P_1 - P_3P_2P_1$$

$$\boxed{P_2 \geq P_1} \checkmark$$

Bu seçeneğin optimal olduğu görülüyor.

$$P_2(P_1 + P_3 - P_1P_3) > P_1(P_2 + P_3 - P_2P_3)$$

$$\Rightarrow \cancel{P_2P_1} + P_2P_3 - \cancel{P_1P_2P_3} > \cancel{P_1P_2} + P_1P_3 - \cancel{P_1P_2P_3}$$

$$\Rightarrow P_2 > P_1$$

$$P_2(P_1 + P_3 - P_1P_3) > P_3(P_1 + P_2 - P_1P_2)$$

$$\Rightarrow P_2 > P_3$$

2. oyuncu en zayıf

Problem 16

3 bozuk paranın ;

I. Birinin her iki tarafı tura (face)

II. Birinin her iki tarafı yazı (tail)

III. Birisi ise normal, bir yüzü tura diğeri yazı

Rasgele paralardan birisi seçilip atılıyor, sonucu tura geliyor. Bu paranın diğer yüzünün yazı olma olasılığı soruluyor.

I. yol .* Bir yüzü tura geldiğine göre II. seçenek olamaz. Yani I. veya III. paralardan birisi çekilmiş olmalı.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$ ihtimalle bu paralardan birisi çekilir.

** Bu çekilen paranın normal para, yani III. seçenek olması için; $\frac{1}{2}$ ihtimale ihtiyaç var. Her iki olay * ve ** independent olduğundan sonuç: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ tür.

II. yol önce P(I. para gelmesi | tura gelmesi) ihtimalini buluruz.

Sonra $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ile,

$P(A\cap B)$: P(I. para gelmesi ve tura gelmesi) $= \frac{1}{3}$

$P(B)$: P(tura gelmesi) $= \frac{1}{2}$

P(I. para gelmesi | tura gelmesi) $= \dfrac{1/3}{1/2} = 2/3$

P(III. para gelmesi | tura gelmesi) $=$ 1 − P(I. para gelmesi | tura gelmesi)

$= 1 - 2/3 = 1/3$ //

Problem 18

A ve B iki olay olsun.

$P(A\cap B\,|\,B)=P(A|B)$ olduğunu gösterelim $(P(B)>0)$

"Conditional probability" modelini kullanırsak; $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$,

$$P(A\cap B|B)=\frac{P(A\cap B\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B) \quad . \ (B\cap B=B)$$

(23) Kavanoz sorusu.

Notasyon : * ilk sırada A, ikinci sırada B kavanozu olsun

* Sadece kendi kavanozunda olmayan topları gösterelim.
* bütün toplar kendi kavanozunda ise 0 ile gösterelim.
* birden fazla kendi kavanozunda olmayan topları A_1, A_2.. ile göster.
* değiştirme sonucunda olası çıktıları daire içinde sayılarla gösterelim.
* iht ok ile gösterelim

1. değiştirme sonunda

(1) $B_1, A_1 \rightarrow 1$

2. değiştirme sonunda

(1) $0,0 \rightarrow \frac{1}{n^2}$ (2) B_1, A_1 / $B_2, A_2 \rightarrow \frac{(n-1)^2}{n^2}$

(3) $B_2, A_1 \rightarrow \frac{n-1}{n^2}$ (4) $B_1, A_2 \rightarrow \frac{n-1}{n^2}$

3. değiştirme sonunda

önceki (1) için

(1) $(B_1, A_1) \rightarrow 1$

önceki (2) için

B_1, A_1
B_1, A_2
B_2, A_1
B_2, A_2
(1) $\rightarrow \frac{4}{n^2}$

önceki (3) için

(1) $(0,0) \rightarrow \frac{1}{n^2}$

(2) $B_1, A_1 \rightarrow \frac{n-1}{n^2}$ (3) $B_2, A_2 \rightarrow \frac{n-1}{n^2}$

önceki (4) için

(1) $(0,0)$ $\frac{1}{n^2}$

(2) (B_2, A_2) $\frac{n-1}{n^2}$ (3) (B_1, A_1) $\frac{n-1}{n^2}$

Aynı duruma gelme iht

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left(111 + 121 + \cancel{131} + 132 + 133 \right.$$
$$\left. \cancel{141} + 142 + 143 \right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{4}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{n^4} + \frac{8(n-1)^2}{n^6}}$$

Problem 27 Alice ve Bob tura gelme olasılığı $\frac{1}{2}$ olan $2n+1$ paraya sahip. Bob $n+1$ para atıyor, Alice ise kalan n parayı atıyor. Tüm paralar atıldıktan sonra Bob'un Alice'den daha fazla tura atma olasılığının $\frac{1}{2}$ olasılığına sahip olduğunu göstermemiz isteniyor. (Para atışları independent)

Bu soruda eğer Bob ve Alice'in herbirinin attığı n para atışında aynı tura sayısını elde ettiğini düşünürsek; Bob'un attığı ekstra 1 para atışında yazı veya tura gelme olasılığı $\frac{1}{2}$'dir.

Ya da, total probability theorem'i kullanarak;

X: Bob'un daha fazla tura atması
Y: Alice'in daha fazla tura atması } n atış ve $P(X) = P(Y)$
Z: Aynı sayıda tura atmaları $[P(Z) = 1 - P(X) - P(Y)]$
T: $n+1$ atışta Bob'un daha fazla tura atması

$= P(T|Y) = 0 \quad , \quad P(T|Z) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(T|X) = 1$

$= \cancel{P(T|Y)}\,P(Y) + P(T|Z)\,P(Z) + P(T|X) \cdot P(X)$
 0

$= \frac{1}{2}P(Z) + P(X) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[1 - P(X) - P(Y)\right] + P(X)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cancel{P(X)} - \frac{1}{2}\cancel{P(Y)} + \cancel{P(X)}$

$= \frac{1}{2}$ //

Scanned by CamScanner

Problem 30. Bir avcının iki köpeğinin, ikiye ayrılan bir yol için doğru yolu seçme olasılıkları birbirinden bağımsız olarak p dir. Avcı herbir köpeğine yol seçtirip eğer ikisi de aynı yolu seçerse, o yola gitmekte, eğer ikisi farklı yollar seçerse, iki yoldan birini random olarak seçmektedir. Avcının bu yaptığının sadece köpeklerden birisine göre karar vermesinden daha iyi olup olmadığı soruluyor.

Öncelikle, avcı bir köpeğin seçimine göre hareket ederse, doğru yolu seçme olasılığı p'dir.

Eğer iki köpeğe göre hareket ederse doğru yolu seçme olasılığını bulalım.

*) İki köpeğin birden aynı yolu seçmesi, ve bu yolun doğru olması

$$P(*) = p \cdot p = p^2$$

**) Köpeklerin ayrı yolları seçmeleri; ve her birinin doğru yolu bulmuş olma olasılığı;

$$P(**) = \frac{p(1-p)}{2}$$

Sonunda, doğru yolu seçme olasılığı, olaylar disjoint olduğundan;

$$p^2 + 2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{2} = p$$

Görüldüğü gibi avcının bir yada her iki köpeğe göre hareket etmesi, doğru yolu bulma olasılığını değiştirmedi.

Problem 39. Bir profesör olduğu kararda n öğrencilik sınıfın derse katılan kısmının sayısı k kişiden azsa, ders yapmayacaktır. Her bir öğrenci independent olarak hava güzelse p_g olasılığında derse katılacak, hava kötüyse p_b olasılığında derse katılacaktır. Belirli bir günde havanın kötü olma olasılığıyla, profesörün ders işleme ihtimalini veren bir expression soruluyor.

X: Havanın kötü olması ihtimali
Y: Hocanın ders işleme ihtimali olsun.

$$* \; P(Y) = \underbrace{P(X)}_{\text{hava kötü}} \underbrace{P(Y|X)}_{\text{hava kötüyken ders işleniyor}} + \underbrace{P(X^c)}_{\text{hava güzel}} \underbrace{P(Y|X^c)}_{\text{hava güzelken ders işleniyor}} \qquad P(X^c) = 1 - P(X)$$

Hava kötüyken yeterli sayıda öğrencinin sınıfta olma ihtimali;

$$P(Y|X) = \binom{n}{i} p_b^{\,i} (1-p_b)^{n-i} \quad \text{for } i = k, k+1, \dots n \equiv \sum_{k}^{n} \binom{n}{i} p_b^{\,i} (1-p_b)^{n-i}$$

Hava iyiyken

$$P(Y|X^c) = \binom{n}{i} p_g^{\,i} (1-p_g)^{n-i} \quad \text{for } i = k, k+1, \dots n \equiv \sum_{k}^{n} \binom{n}{i} p_g^{\,i} (1-p_g)^{n-i}$$

Yukarıda bulduğumuz probability değerlerini * [illegible] ederiz.

Problem 53: Aralarında Joe ve Jane in olduğu 90 kişilik sınıf eşit miktarda üç sınıfa bölünmek isteniyor. Tüm adımlar random olarak parçaklaşacağına göre, Joe ile Jane in aynı sınıfa düşme olasılığı soruluyor.

Sınıf I (30)	Sınıf II (30)	Sınıf III (30)
Joe Jane + 28	+30	+30

İlk etapta Joe ile Jane'i aynı sınıfa yerleştirelim. Geriye kalan 88 kişiyi ise random olarak tüm sınıflara yerleştirelim.

88 kişiden 28: ilk sınıfa ve diğer sınıfların dizilimleri önemli değil.

$$3 \times \frac{\binom{88}{28} \cdot \cancel{\binom{60}{30}} \cdot \cancel{\binom{30}{30}}}{\binom{90}{30} \cdot \cancel{\binom{60}{30}} \cdot \cancel{\binom{30}{30}}}$$

Joe ve Jane'in I. II. ve III sınıfa koyulması ile 3 farklı kombinasyon oluşuyor.

Problem 57. 26 harflik alfabenin harfleri yalnız birkere kullanılmak üzere 6 kelimelik kaç cümle oluşturulabilir. Kelimeler arasında boşluk olmayan harf kümelerinden oluşmaktadır.

$\underbrace{abcdefg\text{------}yz}_{26 \text{ harf}}$

- Bu harfler 26! farklı şekilde sıralanabilir.
- Kelimeleri bölmek için 5 ayırıcıya ihtiyaç vardır. (Ayırıcı = boşluk)
- Harfler arası 25 boşluk oluşturulabileceğinden, Bu 25 'olasılıktan herhangi 5'i seçilir. $\binom{25}{5}$

Sonuç olarak $26!\binom{25}{5}$ kadar ~~kelime~~ cümle yapılabilir.

Problem 59 Bir park alanında k tanesi 'limon'(bozuk) olmak üzere 100 araç var. Rasgele seçilen m tanesi ile test sürüşü yapılıyor. Test edilen araçların n tanesinin 'limon'(bozuk) olma olasılığı soruluyor.

Elimizde bulunan 100 araçtan k tanesi bozuk

100-k tanesi normal

Bu araçlardan m tanesi seçiliyor, n tanesinin k tane bozuk araç arasından alınma olasılığı soruluyor.

$$P(\text{limon}) = \frac{\overbrace{\binom{k}{n}}^{\text{k bozuktan n tane}} \cdot \binom{100-k}{m-n}}{\binom{100}{m}}.$$

$\binom{100-k}{m-n}$ → geriye kalan m-n sağlam araç 100-k arasından seçiliyor.

$\binom{100}{m}$ → Toplamda m araç seçiliyor.

Problem 4 Bir internet sağlayıcısı 1000 kişiye 50 modemle hizmet veriyor. Belli bir zamanda herhangi bir müşterinin internet ihtiyacı olma olasılığı 0.01

a) Modemlerin PMF i: Toplamda 50 modem olduğundan durumu $X<50$ ve $X \geq 50$ olarak değerlendirelim.

50 kişiden az internet kullanımı varsa

$$P_M(k) = \binom{1000}{k} (0{,}01)^k (0{,}99)^{1000-k}$$

50 kişi yada fazla internet kullanımı olduğunda,

$$P_M(50) = \sum_{k=50}^{1000} \binom{1000}{k} (0{,}01)^k (0{,}99)^{1000-k}$$

b) $\lambda = 1000 \times 0{,}01 = 10$

$$P_M(k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}, \quad k = 0, 1, .., 49$$

$$P_M(50) = \sum_{k=50}^{1000} e^{-10} \frac{10^k}{k!}$$

ortalama 10 kişi internet kullanır (1000 x 0.01)

c) X: More customers need connection than modem number

$$P(x) = \sum_{k=51}^{1000} \binom{1000}{k} (0{,}01)^k (0{,}99)^{1000-k}$$

with Poisson,

$$P(x) = \sum_{k=51}^{1000} e^{-10} \frac{10^k}{k!}$$

Problem 16. X is a random variable with PMF

$$P_X(x)=\begin{cases} x^2/a, & \text{if } x=-3,-2,-1,0,1,2,3, \\ 0, & o/w \end{cases}$$

a) $a=?$ and $E[X]=?$

$$\sum_x P_X(x)=1 \text{ olmalı} \rightarrow \sum_x \frac{x^2}{a}=1$$

dışarı çıkarılabilir. (deterministic)

$$\frac{1}{a}\sum_{\substack{x \\ -3<x<3}} x^2=1 \longrightarrow a=\sum_{-3}^{3} x^2=(-3)^2+(-2)^2+\cdots+(3)^2=28$$

Görüldüğü gibi pmf -3 ile 3 arasında x^2/a diğer yerlerde 0. Yani 0 etrafında simetriktir. Bunun için mean $E[X]=0$ dır.

b) PMF of $Z=(X-E[X])^2=?$

$E[X]=0$ olduğundan $Z=X^2$ olur. $z\in\{1^2,2^2,3^2\}$ için;

$$P_Z(z)=P_X(\sqrt{z})+P_X(-\sqrt{z})=\frac{z}{14}.$$

diğer durumlar için ise $P_Z(z)=0$.

c) $\text{var}(X)=E[Z]$ olur.

$$E[Z]=\sum_x zP_Z(z)=\sum_{1,4,9}\frac{z^2}{14}=7.$$

d)
$$\begin{aligned}\text{var}(x)&=\sum_x (x-E[X])^2P_X(x)\\ &=1^2(P_X(-1)+P_X(1))+2^2(P_X(-2)+P_X(2))+3^2(P_X(-3)+P_X(3))\\ &=7.\end{aligned}$$

Problem 17

$$F=32+9C/5$$

$E[X]$ linear operatör olduğundan

$$E[F]=32+E[C]\,9/5 \qquad (E(aX+b)=aE[X]+b)$$
$$=32+18=50$$

$$\text{Var}(F)=(9/5)^2\,\text{var}(C) \qquad (\text{Var}(aX+b)=a^2\,\text{Var}(X))$$

$$\text{std}=\sqrt{\text{Var}}$$
$$=9/5\cdot 10=18$$

$50\mp 18 \Rightarrow$ normal $32-68$ arası

Problem 22 İki madeni para biri tura biri yazı gelene kadar aynı anda atılıyor.
İlk para p olasılığı ile tura geliyor, ikinci ise q. Tüm atışlar independent.

a) PMF, $E[X]$ and $var(X)$ X: # of tosses

b) P(last toss of 1st coin is Head) = ?

a) Oyun bitene kadar atılan paranın atış sayısı : X.

Bu oyun atışlar istenildiği gibi geldiğinde bitiyor; Yani oyun bir geometrik seri oluşturuyor.

$$\text{Geometric r.v} = p(1-p)^{n-1} \quad (*)$$

n-1 kadar atışta fail

n. atışta success

$$P(\{HT, TH\}) = p(1-q) + q(1-p) \longrightarrow \text{Success, yeni } p' = p(1-q)+q(1-p)$$

$$p_X(n) = (1-p(1-q)-q(1-p))^{k-1}(p(1-q)+q(1-p)) \quad \text{from eqn * above.}$$

Böylece $E[X] = \dfrac{1}{p(1-q)+q(1-p)} = \dfrac{1}{p'}$ * Geometrik r.v. özelliklerine bak!

$$var(X) = \frac{pq+(1-p)(1-q)}{(p(1-q)+q(1-p))^2} = \frac{1-p'}{p'^2}$$

b) Yukarıda belirtilen iki durumumuz var = $\{HT, TH\}$. Bu durumun probability si arasından 1. paranın tura gelmesi durumunu bulmamız isteniyor $P(HT)$.

$$P(HT \mid \{HT, TH\}) = \frac{P(HT \cap \{HT, TH\})}{P\{HT, TH\}} = \frac{p(1-q)}{p(1-q)+q(1-p)} \,/\!/$$

Problem 2 X aşağıdaki PDF e sahip

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \qquad \lambda > 0 \text{ scalar}$$

f_X'in normalization conditionunu sağlamasının verify edilmesi ve $E[X]$, $var(X)$ in bulunması isteniyor.

Normalization condition ile kastedilen aslında $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ olmasıdır. Yani $f_X(x)$ in tanımlı olduğu space de total probability sinin 1 olması

$|x| = x$ for positive part of integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \rightarrow \left(\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} = 1 \right)_{\text{property of exponential PDF}} = 1 \,/\!/$$

Simetri olduğundan $E[X] = 0$ ve $E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} = \dfrac{2}{\lambda^2}$ (Exponential PDF'e bak!)

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - 0 = 2/\lambda^2 .$$