Problem 15 Formu $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r^2, y \geq 0\}, r>0$ olan bir yarı çemberden rasgele bir nokta seçiliyor.

a) Seçilen noktanın (X, Y) koordinatlarının joint PDF i soruluyor.

Semicircle ın alanı $\pi r^2/2$.
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2/\pi r^2 & , \text{ if } x,y \in \text{semicircle} \\ 0 & , \text{o/w} \end{cases}$$

b) Y'nin marginal PDF ini bularak bulduğumuz PDF ile $E[Y]$'yi bulmamız isteniyor.

Y'nin marginal PDF ini bulmak için $P_{X,Y}(x,y)$'yi tüm x değerleri için integre etmemiz gerek.

Verilen formun x'e bağlı denklemini alırsak; $x \in [-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]$

Integral işlemi;
$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 2/\pi r^2 \, dx = \frac{2x}{\pi r^2}\Bigg|_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} = 2 \cdot \frac{2x}{\pi r^2}\Bigg|_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}} = \frac{4\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2} & , \quad 0 \leq y \leq r \\ 0 & \quad \text{o/w} \end{cases}$$

Ve
$$E[Y] = \frac{4}{\pi r^2}\int_0^r y\sqrt{r^2-y^2}\, dy = \frac{4r}{3\pi}$$

c) b deki cevabımızı $E[Y]$'yi direk hesaplayarak doğrulamamız isteniyor.

$$E[Y] = \iint_{(x,y)\in C} y\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\pi\int_0^r \frac{2}{\pi r^2} s(\sin\theta)s\,ds\,d\theta = \frac{4r}{3\pi}.$$

Problem 18 X aşağıdaki PDF'e sahip bir random variable

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & , \quad 1 < x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{o/w} \end{cases}$$

ve A $\{X \geq 2\}$ olayı olsun

a) $E[X], P(A), f_{X|A}(x)$ ve $E[X|A]$'yı bulmamız gerekiyor.

$$E[X] = \int_1^3 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{x^3}{12}\Bigg|_1^3 = \frac{13}{6}$$

$$P(A) = \int_2^3 \frac{x}{4}\,dx = \frac{x^2}{8}\Bigg|_2^3 = \frac{5}{8}$$

$$f_{X|A}(x) = \frac{f_X(x)}{P(A)}, \quad x \in A \rightarrow \frac{2x}{5} \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$f_{X|A}(x) = 0 \quad \text{o/w}.$$

$$E[X|A] = \int_{x\in A} x\, f_{X|A}(x)\,dx = \int_2^3 x \cdot \frac{2x}{5}\,dx = \frac{2x^3}{15}\Bigg|_2^3 = \frac{38}{15}$$

Scanned by CamScanner

b) $Y = X^2$ olsun. $E[Y]$ ve $Var[Y]$'yi bulmamız gerekiyor.

$$E[Y] = E[X^2] = \int_1^3 \frac{x^3}{4} dx = 5$$

$$E[Y^2] = \int_1^3 \frac{x^5}{4} dx = \frac{91}{3}$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{91}{3} - 25 = \frac{16}{3}$$

Problem 19. X aşağıdaki PDF'e sahip,

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^{-2}, & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & o/w \end{cases}$$

a) c'nin değeri?

$$\int_1^2 cx^{-2} dx = 1 \quad \text{(normalizasyon özelliği)}$$

$$-cx^{-1} \Big|_1^2 = 1 \rightarrow c - c/2 = 1 \rightarrow c = 2.$$

b) A $X > 1.5$ olması olayı olsun. $P(A)$ ve $f_{X|A}(x|A)$ yı bulmamız isteniyor.

$$P(A) = \int_{1,5}^2 2x^{-2} dx = 1/3$$

$$f_{X|A}(x|A) = \begin{cases} 6x^{-2}, & 1,5 < x \leq 2 \\ 0, & o/w \end{cases}$$

c) $Y = X^2$ olsun. $E[Y|A]$ ve $Var(Y|A)$ soruluyor.

$$E[Y|A] = E[X^2|A] = \int_{1,5}^2 6x^{-2}x^2 dx = 3$$

$$E[Y^2|A] = E[X^4|A] = \int_{1,5}^2 6x^{-2}x^4 dx = \frac{37}{4}$$

$$Var(Y|A) = \frac{37}{4} - 3^2 = 1/4$$

Scanned by CamScanner

Problem 20.

Bir profesör aynı anda iki öğrenci ile randevu ayarlıyor. Randevu zamanları exponential dağılımlı olup, mean'i 30 dakikadır (ve independent). İlk öğrenci tam zamanında randevuya geliyor, ikincisi ise 5 dakika gecikiyor.

İlk öğrencinin randevuya girip, ikinci öğrencinin randevudan çıkması arası sürenin expected value'değeri soruluyor.

$$* \quad E[\text{geçen süre}] = \Big(5 + \underbrace{E[\text{2. öğrencinin kalması}]}_{30}\Big)\, P(\text{1. öğrencinin 5 dakikadan fazla kalmaması})$$

$$+ \big(E[\text{1. öğrencinin kalması} \mid \text{1. öğrencinin 5 dakikadan fazla kalması}] + E[\text{2. öğrencinin kalması}]\big)$$

$$\times\, P(\text{1. öğrencinin 5 dakikadan fazla kalması})$$

$$E[\text{1. öğrencinin kalması} \mid \text{1. öğrencinin 5 dakikadan fazla kalması}] = 5 + E[\text{1. öğrencinin kalması}] = 35,$$

(hafızasızlık özelliği)

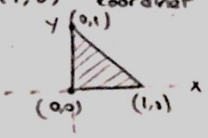
$$P(\text{1. öğrencinin 5 dakikadan az kalması}) = 1 - e^{-5/30}$$

$$P(\text{1. öğrencinin 5 dakikadan fazla kalması}) = 1 - (1 - e^{-5/30})$$

Bulunan değerleri yukarıdaki formülde (*) yerine koyarsak istenilen sonucu elde ederiz.

Problem 23

X ve Y random variable ları (0,0), (0,1), (1,0) koordinat köşeli bir üçgen üzerinde uniform dağılımlı joint PDF 'e sahiptirler.



a) $f_{x,y}(x,y) = ?$

Bu üçgen üzerinde; $A_{\text{üçgen}} = 1/2 \rightarrow f_{x,y}(x,y) = 2$, üçgen haricinde ise 0.

b) $f_Y(y) = ?$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx = \int_0^{1-y} 2\,dx = 2(1-y) \quad \xrightarrow{} 0 \leq y \leq 1$$

c) $f_{X|Y}(x|y) = ?$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{1-y}, \quad 0 \leq x \leq 1-y$$

d) $E[X|Y=y] = ?$ ve total expectation'ı kullanıp $E[X]$ 'i $E[Y]$ yönünden ifade etmemiz isteniyor.

$$E[X|Y=y] = \frac{1-y}{2} \qquad 0 \leq y < 1 \longrightarrow y=1 \text{ iken } x=0 \text{ olmalı}$$

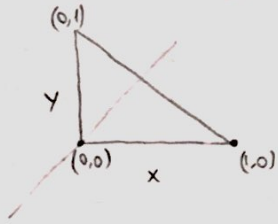
$$E[X|Y=1] = 0 \qquad y=1$$

Üçgenin dışında bu ifade tanımsızdır.

$$E[X] = \int_0^1 \frac{1-y}{2} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \frac{1-E[Y]}{2}.$$

Scanned by CamScanner

e) E[X]'; bu durumun simetrik özelliğini kullanarak bulmamız isteniyor.



Simetriden dolayı $E[X] = E[Y]$ olur.

$$E[X] = (1 - E[X])/2 = 1/3$$

Scanned by CamScanner