

HW-3 ÇÖZÜMÜ

Soru 1 $f(x) = 2x^2 - e^x$ fonk. min. old. yer bul.

Bisection

Minimum lain terevin kökü bulunur.

$$f'(x) = 4x - e^x \rightarrow \text{bu fonk. kullanılacak}$$

$$x_1 = 0.38 \quad f_1 = 0.05771 > 0 \quad x_2 = 0.35 \quad f_2 = -0.01906 < 0$$

1. iterasyon

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.365 \quad f_3 = 0.019 > 0$$

2. iterasyon

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = 0.3575 \quad f_4 = 0.00024 > 0$$

3. iterasyon

$$x_5 = \frac{x_4 + x_2}{2} = 0.35375 \quad f_5 = -0.00739 < 0$$

4. iterasyon

$$x_6 = \frac{x_5 + x_4}{2} = 0.355625 \quad f_6 = -0.00457 < 0$$

5. iterasyon

$$x_7 = \frac{x_6 + x_4}{2} = 0.3565 \quad f_7 = -0.002 < 0$$

6. iterasyon

$$x_8 = \frac{x_7 + x_4}{2} = 0.357031 \quad f_8 = -1.03 \times 10^{-3} < 0$$

7. iterasyon

$$x_9 = \frac{x_8 + x_4}{2} = 0.35726 \quad x_9 - x_8 = 2.29 \times 10^{-4} \text{ de\u0131sim } 10^{-3} \text{ ten k\u00fc\u00fck}$$

$$\boxed{x = 0.35726} \quad 7. \text{ iterasyonda bulundu.}$$

False Position, $f(x) = 4x - e^x$

$$x_1 = 0.38 \quad f_1 = 0.05771 \quad x_2 = 0.35 \quad f_2 = -0.019 < 0$$

1. iterasyon

$$x_3 = x_2 - \frac{f_2(x_2 - x_1)}{f_2 - f_1} = 0.35743 \quad f_3 > 0 \rightarrow \text{ters işaretlisi } x_2$$

2. iterasyon

$$x_4 = x_3 - \frac{f_3(x_3 - x_2)}{f_3 - f_2} = 0.35740 \quad x_4 - x_3 = -2.76 \times 10^{-5} \text{ de\u0131sim } 10^{-3} \text{ den k\u00fc\u00fck}$$

$$\boxed{x = 0.35740} \quad 2. \text{ iterasyonda bulundu.}$$

Sekant (Burada isaret önemli değil)

$$x_1 = 0.38 \quad f_1 = 0.05771 \quad x_2 = 0.35 \quad f_2 = -0.019$$

1. iterasyon

$$x_3 = x_2 - \frac{f_2(x_2 - x_1)}{f_2 - f_1} = 0.35743 \quad f_3 = 0.00007101$$

2. iterasyon

$$x_4 = x_3 - \frac{f_3(x_3 - x_2)}{f_3 - f_2} = 0.35740$$

$$\boxed{x = 0.35740}$$

2. iterasyonda bulundu.

Ridder

$$x_1 = 0.38 \quad f_1 = 0.05771 \quad x_2 = 0.35 \quad f_2 = -0.01906 \quad f_1 > f_2 \oplus$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.365 \quad f_3 = 0.01948$$

1. iterasyon

$$x_4 = x_3 + \frac{(x_3 - x_1) \cdot f_3}{\sqrt{f_3^2 - f_1 \cdot f_2}} = 0.357401$$

2. iterasyon

$$x_1 = 0.357401 \rightarrow f_1 = -3.98 \times 10^{-6}$$

$$x_2 = 0.365 \rightarrow f_2 = 0.01948$$

$$x_3 = 0.3612 \rightarrow f_3 = 9.75 \times 10^{-3}$$

$$f_1 < f_2 \ominus$$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_1) f_3}{\sqrt{f_3^2 - f_1 \cdot f_2}} = 0.357402$$

Değişim 10^{-3} den az

$$\boxed{x = 0.357402}$$

2. iterasyonda bulundu.

Newton - Raphson

$$f(x) = 4x - e^x \rightarrow \text{kullanıyoruz.} \quad f'(x) = 4 - e^x$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{4x_i - e^{x_i}}{4 - e^{x_i}} = \frac{4x_i - x_i \cdot e^{x_i} - 4x_i + e^{x_i}}{4 - e^{x_i}} = \frac{e^{x_i}(1 - x_i)}{4 - e^{x_i}}$$

$$x_0 = 0.5 \text{ için}$$

1. iterasyon

$$x_1 = \frac{e^{0.5}(1 - 0.5)}{4 - e^{0.5}} = 0.3506$$

2. iterasyon

$$x_2 = 0.3573$$

$$x_3 - x_2 = 1.029 \times 10^{-4}$$

değişim 10^{-3} ten küçük

3. iterasyon

$$x_3 = 0.357402$$

$$\boxed{x = 0.357402}$$

3. iterasyonda bulundu

SORU 2: $\sqrt{2}$ değerini Newton-Raphson Yöntemi ile sadece dört işlem kullanarak (kök almada) hesaplayınız. 3 iterasyon yapınız.

$$X = \sqrt{2} \quad X^2 = 2 \quad X^2 - 2 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 2 \rightarrow \text{kökü } \sqrt{2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad f(x_n) = x_n^2 - 2 \quad f'(x_n) = 2x_n$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

$$x_0 = 2 \quad f(x_0) = 2 \quad f'(x_0) = 4$$

1. iterasyon

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} = \frac{6}{4} = 1.5$$

2. iterasyon

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 2}{2x_1} = 1.416$$

3. iterasyon

$$x_3 = \frac{x_2^2 + 2}{2x_2} = 1.4142 \approx \sqrt{2} //$$

SORU 3: $\frac{1}{y} + 2x = 3$ $\frac{1}{x} + y = 2$ 2 (x,y) çifti için çöz.

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 2x + \frac{1}{y} - 3 \\ \frac{1}{x} + y - 2 \end{bmatrix} \quad \vec{J} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{x^2} & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{J} \cdot \vec{\Delta x} = -\vec{f}(\vec{x})$$

A) $x_0 = 1$ $y_0 = 2$ için

1. iterasyon

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2\Delta x - \frac{1}{4}\Delta y &= \frac{1}{2} \\ -\Delta x + \Delta y &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Delta x &= 0.4285 \\ \Delta y &= 1.4285 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x = 1.4285 \\ y_1 &= y_0 + \Delta y = 3.4285 \end{aligned}$$

2. iterasyon

$$\begin{bmatrix} 2 & -0.085 \\ -0.49 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1486 \\ -2.1285 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta x &= -0.1682 \\ \Delta y &= -2.2109 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 1.2603 \\ y_2 &= 1.2176 \end{aligned}$$

3. iterasyon

$$\begin{bmatrix} 2 & -0.6745 \\ -0.6295 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3418 \\ -0.0110 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta x &= -0.2216 \\ \Delta y &= -0.1505 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 1.0387 \\ y_3 &= 1.0671 \end{aligned}$$

B) $x_0 = 0.5$ $y_0 = 0.5$ için

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \Delta x = 0.142 \quad x_1 = 0.6428$$

$$\Delta y = 0.0714 \quad y_1 = 0.5714$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3.0628 \\ -2.4201 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0356 \\ -0.1270 \end{bmatrix} \quad \Delta x = 0.0784 \quad x_2 = 0.7212$$

$$\Delta y = 0.0628 \quad y_2 = 0.6342$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2.4862 \\ -1.9225 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01918 \\ -0.0207 \end{bmatrix} \quad \Delta x = 0.0254 \quad x_3 = 0.74668$$

$$\Delta y = 0.0282 \quad y_3 = 0.6624$$

$x_0 = 1$ $y_0 = 2$ için $(x, y) = (1.0387, 1.0671)$ bulundu.

$x_0 = 0.5$ $y_0 = 0.5$ " $(x, y) = (0.74668, 0.6624)$ "

Analitik olarak çözümlerse

$$\frac{1}{4} + 2x = 3$$

$$\frac{1}{x} + y = 2$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2y}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2y}} + y = 2$$

$$\frac{2y}{3y-1} + y = 2$$

$$3y^2 - 5y + 2 = 0 \quad y_1 = \frac{2}{3} \quad x_1 = \frac{3}{4} \rightarrow (0.75, 0.666)$$

$$(3y-2)(y-1) = 0 \quad y_2 = 1 \quad x_2 = 1 \rightarrow (1, 1)$$

Newton - Raphson yöntemi ile bulunan kökler

ve analitik olarak çözümler " " arasında 1.köklere için

$$(0.75, 0.666) \leftrightarrow (0.74668, 0.6624) \quad 3.82 \times 10^{-3} \text{ gibi fark bulundu}$$

$$(1, 1) \leftrightarrow (1.0387, 1.0671) \leftrightarrow 0.0371 \text{ gibi bir fark bulundu.}$$

Yani sayısal yöntemlerle bulunan sonuç ile analitik

yöntemlerle bulunan sonuç birbirine çok yakın çıktı.

Soru 4: $x = 0, -0.01, 0.02$ değerlerinde örneklenmiş olan fonksiyonun 0 noktasında 2. terevini yaklaşıklık olarak hesaplayan formülü çıkarınız.

$$h = 0.01 \text{ alın}$$

$$x = 0 \rightarrow f(x)$$

$$x = -0.01 \rightarrow f(x-h)$$

$$x = 0.02 \rightarrow f(x+2h)$$

} fonksiyonlarını temsil eder

2. terev için $f''(x) \rightarrow$ değerinin formülü isteniyor.

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \dots$$

$$+ f(x+2h) = f(x) + 2h \cdot f'(x) + \frac{4h^2}{2} f''(x) + \frac{8h^3}{6} f^{(3)}(x) + \dots$$

$$2 \cdot f(x-h) + f(x+2h) = 3f(x) + \left(\frac{2h^2}{2} + 2h^2\right) f''(x)$$

$$f''(x) = \frac{2f(x-h) + f(x+2h) - 3f(x)}{3h^2} + \underbrace{O(h \dots)}_{\text{Hata}}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot f(x-h) + f(x+2h) - 3f(x)}{3h^2}$$

Solusi: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots$
 $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \dots$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{2} f^{(4)}(x)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \quad \underbrace{- \frac{h^2}{2} f^{(4)}(x) \dots}_{o(h^2)}$$

$$h=h_1 \Rightarrow G = g(h_1) + ch_1^p \quad c = \frac{G - g(h_1)}{h_1^p}$$

$$h=h_2 \Rightarrow G = g(h_2) + ch_2^p \quad c = \frac{G - g(h_2)}{h_2^p}$$

$$G = \frac{g(h_1) \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p - g(h_2)}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p - 1}$$

$$o(h^2) \Rightarrow p=2 \quad g(h_1) = \frac{f(x+h_1) + f(x-h_1) - 2f(x)}{h_1^2}$$

$$g(h_2) = \frac{f(x+h_2) + f(x-h_2) - 2f(x)}{h_2^2}$$

$$G = \frac{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \left(\frac{f(x+h_1) + f(x-h_1) - 2f(x)}{h_1^2} \right) - \frac{f(x+h_2) + f(x-h_2) - 2f(x)}{h_2^2}}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 1}$$

$$G = \frac{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \cdot [f(x+h_1) + f(x-h_1) - 2f(x)] - \frac{1}{h_1^2 \cdot h_2^2} [f(x+h_2) + f(x-h_2) - 2f(x)]}{h_2^2 - h_1^2}$$

$f(x+h_1) = y_1$ $f(x) = y_3$ $f(x-h_2) = y_4$ titik-titik bilinmelidir.

$f(x-h_1) = y_2$ $f(x+h_2) = y_4$

Yani 5 noktanın bilinmesi gerekmektedir.