ELE 375 – ÖDEV 4

1) $f(x) = x^2$; $h = 1/2$; $x = 1$

Simetrik iki noktalı:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$- \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \cancel{2}\frac{h^3}{\cancel{3!}_{3}} f'''(x) + \dots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3} f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \Rightarrow f'(1) = \frac{f(1+0{,}5) - f(1-0{,}5)}{2.0{,}5}$$

$$= \frac{(1{,}5)^2 - (0{,}5)^2}{1} \Rightarrow f'(1) = 2$$

Antisimetrik iki noktalı:

$$4 / \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x)$$

$$- \quad f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2!} f''(x)$$

$$4f(x+h) - f(x+2h) = 3f(x) + 2hf'(x)$$

$$f'(x) = \frac{4f(x+h) - f(x+2h) - 3f(x)}{2h} \Rightarrow f'(1) = \frac{4f(1+0{,}5) - f(1+1) - 3f(1)}{2.0{,}5}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4.2{,}25 - 4 - 3}{1} = 2$$

Simetrik dört noktalı:

$$1 / \quad f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2!} f''(x)$$

$$4 / \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x)$$

$$-4 / \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x)$$

$$-1 / \quad f(x-2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2!} f''(x)$$

$$+$$

$$4f(x+h) - 4f(x-h) + f(x+2h) - f(x-2h) = 12hf'(x)$$

$$f'(x) = \frac{4(f(x+h) - f(x-h)) + f(x+2h) - f(x-2h)}{12h}$$

$$f'(1) = \frac{4(f(1+0{,}5) - f(1-0{,}5)) + f(1+2.0{,}5) - f(1-2.0{,}5)}{12.0{,}5} = \frac{4(1{,}5^2 - 0{,}5^2) + 2^2 - 0^2}{6} = 2$$

Analitik çözüm

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2$$

Fark denklemleriyle sayısal türev hesaplanırken Taylor serilerinden faydalanılmaktadır. Taylor serilerine açarken bizden sadece 1. mertebeden türev istendiği için daha yüksek mertebeli türevler ihmal edildi. Burda ise fonksiyonun türünden dolayı ihmal edilen türevler zaten sıfırdı (x^2nin üçüncü türevi). Hata olmadı.

2) a. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}$ $\quad x = \ln(1/t) \quad dx = -\frac{1}{t}dt$ $\quad -\ln(t) = \infty,\ t=0$; $-\ln(t) = 0,\ t=1$ $\quad 0,1 \to$ yeni sınırlar

$$\int_0^1 \ln(1/t)\frac{1}{e^{\ln(1/t)}+1}\left(\frac{-1}{t}\right)dt$$

$$= \int_0^1 \ln(t)\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\ln(t)\,dt \Rightarrow \underline{\text{Gauss-Log}}:$$

$$\int_0^1 \omega(x)\ln(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\Rightarrow A_1\frac{1}{t_1+1} + A_2\frac{1}{t_2+1} + A_3\frac{1}{t_3+1} + A_4\frac{1}{t_4+1}$$

b. Bileşik Yamuk kuralından (2 yamuk için);

$$f(x) = \frac{x}{e^x+1} \quad a=0 \quad b=\infty \quad \to H = b-a = \infty - 0 = \infty$$

$$I_1 = [f(a)+f(b)]\frac{H}{2} = [f(0)+f(\infty)]\cdot\frac{\infty}{2} = \left[\frac{0}{2}+\frac{\infty}{e^\infty+1}\right]\cdot\frac{\infty}{2}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\Rightarrow$ sonuç yok.

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1 + f\left(a+\frac{H}{2}\right)\cdot\frac{H}{2}$$ $\Rightarrow I_1$'i bilmemiz gerekli olduğu için I_2 hesaplanamaz.

Bileşik yamuk kuralı ile çözüm yaparken belirsizliklere sebep olan sınır değerleri bulunduğunda hesaplama yapılamaması bir dezavantaj. Bu dezavantajın önüne geçebilmek için belirsizliklerin ortadan kaldırılması gerekir. Bunun için sınır değerlerini değiştirip hesaplama yapılabilir.

3) a. $\int_0^{0,5} \cos(\pi x)\ln(x)dx \qquad x = t/2 \quad dx = \frac{1}{2}dt \qquad t/2 = 0,5 \quad t=1$

$t/2 = 0 \quad t = 0$

$0,1 \rightarrow$ yeni sınırlar

$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}.t\right)\ln\left(\frac{t}{2}\right).\frac{1}{2}dt \Rightarrow$ Gauss-log ;

$\int_0^1 \frac{1}{t+1}\ln(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

$$= \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)(\ln t - \ln 2)dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ln t\, dt}_{①} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ln 2\, dt}_{②}.$$

① $\frac{1}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\ln t\, dt \approx \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[A_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t_1\right) + A_2\cos\left(\frac{\pi}{2}.t_2\right) + A_3\cos\left(\frac{\pi}{2}.t_3\right) + A_4\cos\left(\frac{\pi}{2}t_4\right)\right]$

② $\frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = 0,347.\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = 0,347$

$\frac{t}{2} = x \quad , t = 2x$

$$\Rightarrow \int_0^{0,5} \cos(\pi x)\ln(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[A_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t_1\right) + A_2\cos\left(\frac{\pi}{2}t_2\right) + A_3\cos\left(\frac{\pi}{2}t_3\right) + A_4\cos\left(\frac{\pi}{2}t_4\right)\right] + 0,347$$

b. Bileşik yamuk kuralından (2 yamuk);

$f(x) = \cos(\pi x)\ln x \qquad a=0 \quad b=0,5$

$H = b-a = 0,5$

$I_1 = [f(a)+f(b)]\frac{H}{2} = [f(0)+f(0,5)]\frac{0,5}{2} = [\cos 0.\ln 0 + \cos(0,5\pi).\ln(0,5)].0,25 = \infty$

$I_2 = \frac{1}{2}I_1 + f\left(a+\frac{H}{2}\right).\frac{H}{2} = \infty + 0,25.\cos(0,25\pi)\ln 0,25 = \infty$

Bileşik yamuk kuralı ile integral hesaplarken $I_1 = \infty$ bulundu. I_2'yi hesaplarken I_1'den yararlandığımız için I_2'de ∞ olarak bulundu. $a=0$ değeri değiştirilirse bu durumdan kaynaklanan belirsizlik ortadan kalkabilir.

4) 1 segment

$f(x)=x^2 \quad a=1 \quad b=2$

$H=b-a=1$

$$I_1=[f(a)+f(b)]\frac{H}{2}=[f(1)+f(2)]\cdot\frac{1}{2}=[1+4]\cdot\frac{1}{2}=5/2=2{,}5$$

2 segment

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+f\left(a+\frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2{,}5+f\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=1{,}25+(1{,}5)^2\cdot\frac{1}{2}=2{,}375$$

4 segment

$$I_3=\frac{1}{2}\cdot I_2+\left[f\left(a+\frac{H}{4}\right)+f\left(a+\frac{3H}{4}\right)\right]\frac{H}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2{,}375+[f(1{,}25)+f(1{,}75)]\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1{,}1875+[(1{,}25)^2+(1{,}75)^2]\frac{1}{2}=2{,}344$$

8 segment

$$I_4=\frac{1}{2}I_3+\left[f\left(a+\frac{H}{8}\right)+f\left(a+\frac{3H}{8}\right)+f\left(a+\frac{5H}{8}\right)\right]\frac{H}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2{,}344+[f(1{,}125)+f(1{,}375)+f(1{,}625)+f(1{,}875)]\frac{1}{8}=2{,}336$$

Analitik Çözüm

$$\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\cong 2{,}333$$

Bileşik yamuk yöntemi ile 1,2,4,8 segment kullanılarak elde edilen değerler kıyaslandığında segment sayısı arttıkça elde edilen sonuçlar, analitik yöntemle hesaplanan sonuca giderek daha da çok yaklaşmaktadır. Segment sayısı arttıkça analitik yönteme daha yakın sonuçlar elde edilmesinin sebebi daha az hata oluşmaktadır.