Doğrusal Denklemler Sis./Sys. of Linear Equations

Uygulama alanı: Lineer olan her sistem
Notation: $Ax = b$ Augmented [A I b]

- Uniqueness $|A| \neq 0$, $A_{n\times n}$

- Bu şekilde yazılan sistemler Overdetermined (denklem sayısı bilinmeyen sayısından çok, sıfır çözüm), Underdetermined (bilinmeyen sayısı denklem sayısından çok, sonsuz çözüm), veya tek (unique) çözümlü olabilirler. Kare sistemlerde A'nın determinantı sıfır (singular) ise sonsuz çözüm vardır.

Doğrusal Denklemler Sistemi

- Ill conditioned, neredeyse singular olma durumu; teorik olarak singular değil yani unique çözüm var ama pratikte sorunlu

$$|A| \ << \|A\|$$

$$\|A\|_e = (\sum_i \sum_j A_{ij}^2)^{1/2} \text{ or other norms}$$

- Alternatif olarak ill-conditioned olma durumuna matrix condition number kullanılarak da bakılabilir

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

- Bu değer ne kadar büyükse sistem/problem o kadar ill-conditioned, 1'e ne kadar yakınsa sistem o kadar sağlıklı (well-conditioned) olur

Doğrusal Denklemler Sistemi

- Ill conditioned sistemler için örnek

$$2x + y = 3 \qquad 2x + 1.001y = 0$$

$$x = 1501.5 \qquad y = -3000$$

$$|A| \;= 0.002 \Rightarrow \text{ill conditioned} \Rightarrow 2x + 1.002y = 0$$

$$x = 751.5 \quad y = -1500$$

- Direkt metodlar $x = A^{-1}b$'i sonucunu analitik olarak veren yöntemlerdir

- Indirect/iterative methods ise analitik çözüm yerine sayısal çözümler verirler, ve bir ilk tahminden başlayarak yavaş yavaş çözüme ilerlerler.

Direkt Metodlar

- Üç tane direkt metod göreceğiz:
  -Gauss Eleme -LU Çözümlemesi (decomposition)
  -Choleski Çözümlemesi

- Gauss Eleme

  $A\vec{x} = \vec{b}$ sistemi su hale getirilir $U\vec{x} = \vec{c}$ U : upper triangle

  Eleme Aşaması :$Eq.(i) \leftarrow Eq.(i) - \lambda \times Eq.(j)$, Örneğin

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\
-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -16 \\
x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 17
\end{aligned}
$$

Direkt Metodlar: Gauss Eleme Yöntemi

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 11 \\ -2 & 4 & -2 & -16 \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 6 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \end{bmatrix}.$$

2. satır 1. sütün elemesi için 2. satır -2 ile çarpılır ve birinci satır ikinc satırdan çıkarılarak 2. satır yerine yazılır. Benzer işlemler diğer satır ve sütünlar için tekrarlanır.

Gauss Eleme için Genel Algoritma

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} & b_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} & b_n \end{bmatrix}$$

1. sütün için, i. satır $A_{i,1}/A_{1,1}$ ile çarpılır ve kendisinden çıkarılarak yerine yazılır.

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & U_{1,n} & c_1 \\ 0 & U_{2,2} & \cdots & U_{2,n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & U_{m,2} & \cdots & U_{m,n} & c_n \end{bmatrix}$$

Daha sonra bütün sütünlar için tekrar edilir.

Direkt Metodlar

- LU Çözümlemesi (Decomposition)
  $A = LU \rightarrow$; tek bir çözümleme seçeneği yoktur, onun için belli bir şart kullanılır, örneğin Doolittle şartı

- Doolittle $L_{ii} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{bmatrix} =$$

$$A = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ U_{1,1}L_{2,1} & U_{2,2}L_{2,1} + U_{2,2} & U_{1,3}L_{2,1} + U_{2,3} \\ U_{1,1}L_{3,1} & U_{1,2}L_{3,1} + U_{2,2}L_{3,2} & U_{1,3}L_{3,1} + U_{2,3}L_{3,2} + U_{3,3} \end{bmatrix}$$

LU Çözümlemesi

L ve U değerlerini bulmak için A'ya Gauss Eleme uygulayalım ;

$$1st\,Pass \Rightarrow row2 \leftarrow row2 - L_{21} \times row1(A_{21} elenmesi)$$

$$row3 \leftarrow row3 - L_{31} \times row1(A_{21} elenmesi)$$

$$2ndPass \Rightarrow row3 \rightarrow row3 - L_{32} \times row2(A_{32} elenmesi)$$

LU Çözümlemesi

1. Aşama ⇒

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & U_{2,2}L_{,3,2} & U_{2,3}L_{3,2}+U_{3,3} \end{bmatrix}$$

2. Aşama⇒

$$\mathbf{A''}{=}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{bmatrix}$$

O zaman: A'ya Gauss Eleme uygulanır, sonuçta kalan U, aradığımız U olur; ve kullandığımız katsayılar L'yi oluşturmak için kullanılır

Direkt Metodlar

- Choleski Çözümlemesi

  $A = LL^T$.   A : Positive definite and simetrik olmalı

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{11} & L_{21} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}}, \qquad L_{i1} = A_{i1}/L_{11}, \qquad L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (L_{jk})^2}$$

$$L_{ij} = (A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}L_{jk})/L_{jj}, j = 2, 3, ..., n-1, i = j+1, j+2, ..., n$$

Direkt Metodlar

LU Çözümleme Örneği

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Burada ilk satırı -0.5 ile çarpıp ikinci satırdan çıkarıp ikinci satırın yerine yazarız.
Benzer şekilde ilk satırı 0.5 ile çarpıp üçüncü satırdan çıkarıp üçüncü satıra yazarız. Böylece ilk sütün tamamlanmış olur.
Daha sonra ikinci sütün için ikinci satırı -3lle çarpıp üçüncü satırdan çıkarıp üçüncü satıra yazarız. Elimizde kalan U, U olur. Ve Çarptığımız sayılar, yani -0.5, 0.5 ve -3 L'yi oluşturur.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Direkt Metodlar

Choleski Örneği

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} = 1; L_{21} = A_{21}/L_{11} = 2; L_{31} = A_{31}/L_{11} = 3;$$

$$L_{22} = \sqrt{A_{22} - (L_{21})^2} = 1;$$

$$, L_{32} = A_{32} - L_{31}L_{21}/L_{22} = 1; L_{33} = \sqrt{A_{33} - (L_{31})^2 - (L_{32})^2} = 2$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; A = L.L^T$$

İteratif Metodlar

İteratif metodlar için birkaç önemli nokta vardır. (i) Doğru çözüme converge etme. (ii) Converge etme hızı ve (iii) ilk değerden mümkün olduğunca bağımsız converge etme.

- Gauss-Siedel

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + ... + A_{1n}x_n$$

$$x_1 = \frac{b_i - (A_{12} + ... + A_{1n}x_n)}{A_{11}}$$

genel terim: $$x_i = \frac{1}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_{ij}x_j) \qquad i = 1, .., n$$

Gauss Seidel Örnek

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -16 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{11 + 2x_2 - x_3}{4}, \qquad x_2 = \frac{2x_1 + 2x_3 - 16}{4}, \qquad x_3 = \frac{17 - x_1 + 2x_2}{4}$$

0,0,0 ilk tahminimiz olsun

$x_1 = \frac{11}{4} = 2.75, \qquad x_2 = \frac{5.5-16}{4} = -2.62,\ x_3 = \frac{17-\frac{11}{4}-\frac{21}{4}}{4} = 2.25$

$x_1 = \frac{11-\frac{21}{4}-\frac{9}{4}}{4} = 0.625, x_2 = \frac{1.25+4.5-16}{4} = -2.5625,$

$x_3 = \frac{17-0.625-5.125}{4} = 2.8125$

$x_1 = \frac{11-5.150-2.8125}{4} = 0.76, x_2 = \frac{17-0.625-16}{4} = -2.21,$

$x_3 = \frac{17-0.76-4.42}{4} = 2.95$

...

...

Conjugate Gradient Metodu

Burada problemi doğrudan çözmek yerine dolaylı yoldan çözüyoruz. Şöyle bir fonksiyon tanımlayıp minimimunu bulmaya çalışalım.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

Bu fonksiyonun minimumunu türev alıp sıfıra eşitleyerek bulabiliriz.
Türev: $Ax - b = 0$
Minimumu bulma işlemi ise CGM ile yapılır. CGM için iki önemli parça vardır: (i) arama yönü (search direction) ve (ii) adım miktarı (step size. Bunlar CGM için şu şekilde bulunur.

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k \qquad A(x_k + \alpha_k s_k) = b, Ax_k + \alpha As_k = b, \alpha = \frac{s_k^T(b - Ax_k)}{s_k^T As_k}$

$S_k = -\nabla f = r_k$ (steepest descent) veya $\vec{S_{k+1}} = \vec{r_{k+1}} + \beta_k s_k (CGM)$

β şu şekilde hesaplanır $\qquad S_{k+1}^T As_k = 0$

$(\vec{r_{k+1}^T} + \beta_k S_k^T)AS_k = 0 \qquad \beta_k = \frac{-r_{k+1}^T AS_k}{S_k^T AS_k}$

Conjugate Gradient Metodu: Örnek

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 12 \\ -1 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$r_0 = b - Ax_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$s_0 = b - Ax_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha_0 = \frac{s_0^T r_0}{s_0^T A S_0} = 0.201 \qquad x_1 = x_0 + 0.201 \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.42 \\ -0.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conjugate Gradient Metodu: Örnek (devam)

örnek devam

$$r_1 = b - Ax_1 = \begin{bmatrix} 1.12 \\ 4.23 \\ -1.848 \end{bmatrix}. \ \beta_0 = \frac{-r_1^T Ab}{s_0^T a s_0} = 0.133. \ s_1 = r_1 + \beta_0 s_0 = \begin{bmatrix} 2.72 \\ 4.1 \\ -1.1 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha_1 = \frac{s_1^T r_1}{s_1^t A s_1} = 0.26$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 s_1 = \begin{bmatrix} 3.07 \\ 0.79 \\ 0.72 \end{bmatrix}, r_2 = b - Ax_2 = \begin{bmatrix} -0.23 \\ 0.34 \\ 0.63 \end{bmatrix}, \beta_1 = 0.025$$

$$s_2 = r_2 + \beta_1 s_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.73 \\ 1.36 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \frac{r_2^T s_2}{s_2^T A S_2} = 0.167, x_3 = x_2 + \alpha_2 s_2 = \begin{bmatrix} 2.98 \\ 0.91 \\ 0.95 \end{bmatrix},$$

...

...