# İnterpolasyon/Interpolation ve Eğri Uydurma/Curve Fitting

Interpolasyon $\rightarrow$ Eksik/örneklenmemiş noktalarda değerleri bulma

Curve Fitting $\rightarrow$ Verilen data noktalarına uygun bir eğri bulma (tam olarak data noktalarından geçmek zorunda değil)

**Polinom Eğri uydurma**

- $n$ noktadan en düşük dereceli $n-1$. dereceden polinom geçer

- Bu polinomu bulmak için üç tane metod göreceğiz: (i) Lagrange, (ii) Newton, (iii) Neville Metodları

# Lagrange Metodu

- Aradığımız polinom şu şekilde bulunur

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x) \quad , \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 1, \ldots.., n$$

$$l_i(x_j) = \begin{Bmatrix} 0 & if & i \neq j \\ 1 & if & i = j \end{Bmatrix} = \delta_{ij}$$

$$P_{n-1}(x_j) = y_j$$

- Burada $l_i(x_j)$ sadece $i = j$ için sıfır olmayacak şekilde özel olarak tasarlanmıştır.

# Lagrange Metodu: Örnek

Aşağıdaki data noktalaı verilmiş olan fonksiyonun $x = 1$ noktasındaki değerini polinom uydurarak bulunuz. Lagrange Metodunu kullanın.

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 2 | 3 |
| y | 7 | 11 | 28 |

$$\ell_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(1-2)(1-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{1}{3}$$

$$\ell_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(1-0)(1-3)}{(2-0)(2-3)} = 1$$

$$\ell_3 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(1-0)(1-2)}{(3-0)(3-2)} = \frac{1}{3}$$

$$y = y_1\ell 1 + y_2\ell 2 + y_3\ell_3 = \frac{7}{3} + 11 - \frac{28}{3} = 4$$

# Newton Metodu

- Lagrange basit ama etkin bir metod değil (çok fazla sayıda işlem gerektiriyor)

- $n-1$. polinomu şu şekilde yazabiliriz:

$$P_{n-1}(x) = a_1 + (x-x_1)a_2 + (x-x_1)(x-x_2)a_3 +$$

$$... + (x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{n-1})a_n$$

- Bu polinom recurrent olarak örneğin $n=4$ için şu şekilde hesaplanabilir:

$$P_0(x) = a_4,\ P_1(x) = a_3 + (x-x_3)P_0(x),\ P_2(x) = a_2 + (x-x_2)P_1(x),$$

$$P_3(x) = a_1 + (x-x_1)P_2(x)$$

# Newton Metodu

- Genel olarak ise

$$P_0(x) = a_n, P_k(x) = a_{n-k} + (x - x_{n-k})P_{k-1}(x), k = 1, 2, ...., n - 1$$

- Bulmamız gereken $a_i$ katsayıları ile $y$ler arasındaki ilişki şu şekildedir

$$y_1 = a_1, \qquad y_2 = a_1 + (x_2 - x_1)a_2,$$

$$y_3 = a_1 + (x_3 - x_1)a_2 + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)a_3$$

$$...$$

$$y_n = a_1 + (x_n - x_1)a_2 + .... + (x_n - x_1)(x_n - x_2)...(x_n - x_{n-1})a_n$$

# Newton Metodu

- Buradan $a$ katsayıları şu şekilde yalnız bırakılarak bulunur:

$$a_1 = y_1, \qquad a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad a_3 = \frac{\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3 - x_2}....$$

- Şöyle yeni bir notasyon kullanalım

$$\nabla y_i = \frac{y_i - y_1}{x_i - x_1},\ i = 2, 3, ..., n,\ \nabla^2 y_i = \frac{\nabla y_i - \nabla y_2}{x_i - x_2},\ i = 3, 4, ..., n$$

$$...\nabla^n y_i = \frac{\nabla^{n-1} y_i - \nabla^{n-1} y_n}{x_i - x_n}$$

$$a_1 = y_1, \qquad a_2 = \nabla y_2, \qquad a_3 = \nabla^2 y_3, ..... \qquad a_n = \nabla^{n-1} y_n$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | | | | |
| $x_2$ | $y_2$ | $\nabla y_2$ | | | |
| $x_3$ | $y_3$ | $\nabla y_3$ | $\nabla^2 y_3$ | | |
| $x_4$ | $y_4$ | $\nabla y_4$ | $\nabla^2 y_4$ | $\nabla^3 y_4$ | |
| $x_5$ | $y_5$ | $\nabla y_5$ | $\nabla^2 y_5$ | $\nabla^3 y_5$ | $\nabla^4 y_5$ |

# Newton Metodu: Örnek

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 59 & 4 & 24 & -53 \end{bmatrix}$$

| $x$ | $y$ | $\nabla y$ | $\nabla^2 y$ | $\nabla^3 y$ | $\nabla^4 y$ | $\nabla^5 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $-1$ | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 4 | 59 | 10 | 3 | | | |
| $-1$ | 4 | 5 | $-2$ | 1 | | |
| 3 | 24 | 5 | 2 | 1 | 0 | |
| $-4$ | $-53$ | 26 | $-5$ | 1 | 0 | 0 |

$$P_0(x) = a_6 = 0, P_1(x) = a_5 + (x - x_5)P_0(x) = 0$$

$$P_2(x) = a_4 + (x - x_5)P_1(x) = 1$$

$$P_3(x) = a_3 + (x - x_3)P_2(x) = 3 + (x - 4)1 = x - 1$$

$$P_4(x) = a_2 + (x - x_2)P_3(x) = 1 + (x - 1)(x - 1) = x^2 - 2x + 2$$

$$P_5(x) = a_1 + (x - x_1)P_4(x) = x^3 - 2x + 3$$

# Neville Metodu

- Bu metodda düşük dereceli polinomlardan yüksek dereceli polinomlar recursive bir şekilde elde edilir.

$$P_0[x_i] = y_i$$

$$P_k[x_i, ..., x_{i+k}] =$$

$$\frac{(x - x_{i+k})P_{k-1}[x_i, ..., x_{i+k-1}] + (x_i - x)P_{k-1}[x_{i+1}.....x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}$$

- Burada ihtiyacımız olan polinomlar şu tabloya göre belirlenebilir

| | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $P_0[x_1] = y_1$ | $P_1[x_1, x_2]$ | $P_2[x_1, x_2, x_3]$ | $P_3[x_1, x_2, x_3, x_4]$ |
| $x_2$ | $P_0[x_2] = y_2$ | $P_1[x_2, x_3]$ | $P_2[x_2, x_3, x_4]$ | |
| $x_3$ | $P_0[x_3] = y_3$ | $P_1[x_3, x_4]$ | | |
| $x_4$ | $P_0[x_4] = y_4$ | | | |

# Neville Metodu: Örnek

Aşağıda data noktalarına Neville Metodunu kullanarak bir polinom uydurun.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}, P_3(x) = ?$$

$$P_1[x,x_2] = \frac{(x-x_2)P_0[x_1] + (x_1 - x)P_0[x_2]}{x_1 - x_2}$$

$$= ((x-1)(-1) + (-x)(-2))/-1 = -1 - x$$

$$P_1[x_2,x_3] = \frac{(x-x_3)P_0[x_2] + (x_2 - x)P_0[x_3]}{x_2 - x_3}$$

$$= \frac{(x-2)(-2) + (1-x).0}{-1} = 2x - 4$$

# Neville Metodu: Örnek (Devam)

$$P_1[x_3, x_4] = \frac{(x - x_4)P_0[x_3] + (x_3 - x)P_0[x_4]}{x_3 - x_4}$$

$$= ((x - 3)0 + (2 - x)10)/ - 1 = 10x - 20$$

$$P_2[x_1, x_2, x_3] = \frac{(x - x_3)P_1[x_1, x_2] + (x_1 - x)P_1[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$= \frac{(x - 2)(-1 - x) + (-x)(2x - 4)}{-2} = \frac{3x^2 - 5x - 2}{2}$$

# Neville Metodu: Örnek (Devam)

$$P_2[x_2, x_3, x_4] = \frac{(x - x_4)P_1[x_2, x_3] + (x_2 - x)P_1[x_3, x_4]}{x_2 - x_4}$$

$$= \frac{(x-3)(2x-4) + (1-x)(10x-20)}{-2} = 4x^2 - 10x + 4$$

$$P_3[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(x - x_4)P_2[x_1, x_2, x_3] + (x_1 - x)P_2[x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4}$$

$$= \frac{(x-3)\frac{3x^2-5x-2}{2} + (0-x)(4x^2 - 10x + 4)}{-3} = \frac{5x^3 - 6x^2 - 5x - 6}{6}$$