Denklemlerin Kökleri/Roots of Equtions

- Burada amaç $f(x) = 0$ denklemini çözmek, ve bunu analatik olarak değil sayısal olarak yapmak istiyoruz.

- Bazen analitik çözüm zaten olmadığı için sayısal olarak yapmak zorunda kalırız, bazense analitik çözüm olsa bile çok yavaş olacağı için sayısal çözümü tercih ederiz.

- Bu denklemi sayısal olarak çözmek için iki grup metod göreceğiz. Bunlardan ilk grup metod daha çok geometrik yaklaşımlar içerirken, ikinci grup metodda ise Taylor Serisi Kullanılarak cebirsel bir yaklaşım serilenmektedir.

- İlk grup metodda şu metodlar yer alır: (i) Arama yöntemi (Incremental Search), (ii) ikiye bölme yöntemi (bisection method), (iiia) Sekant Yöntemi, (iiib)false position yöntemi, (iv) Ridder Yöntemi. İkinci olarak ise Newton-Raphson Yöntemini göreceğiz.

Arama Yöntemi ve İkiye Bölme Yöntemi

- Arama Yöntemi: $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ ters işaretliyse x_1 ve x_2 arasında kök vardır. Bu kökü x_1'den Δx adımlarla artırarak x_2'ye kadar tarayarak bulunabilir. <u>Sorunlar</u>

* Δx yeterince küçük değilse kök gözden kaçabilir

* Δx çok küçük olursa sistem çok yavaş olur

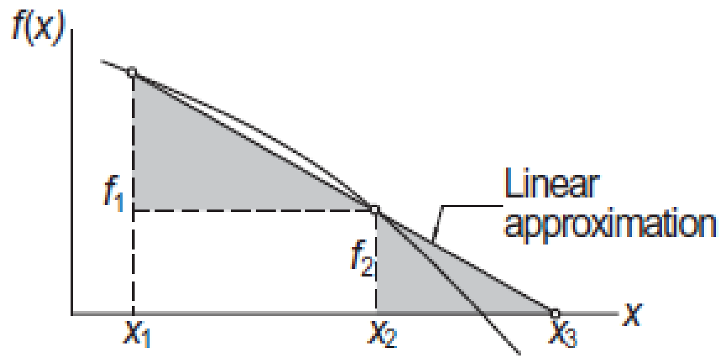
* İşaret değişikliği olduğu halde kök olmayabilir. Ör: $tan(x)$

- İkiye Bölme Yöntemi

- x_1, x_2 arasında kök olsun.
  $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$'ye bakılır. işaretine göre ya $[x_1, x_3]$ ya da $[x_2, x_3]$ arasında kök vardır. İşlem devam ettirilir.

Sekant ve False Position Yöntemleri

- Burada x_1, x_2 köke yakın değerler olsun, bu iki noktadan geçen doğru bulunur ve bu doğrunun sıfır kestiği nokta kök tahmini olarak kullanılır.



$$x_3 = x_2 - f_2 \frac{x_2 - x_1}{f_2 - f_1}$$

- Sekant Metodu: x_2 ve x_3 yeni x_1 ve x_2 olarak kullanılır.

- False Position Method: x_1 ve x_2 ters işaretli olmalı x_1 x_2 $x_3$den ters işaretli olacak şekilde x_1 x_3 veya x_2 x_3 seçilir.

Örnek

Şu kök bulma problemine bakalım

$$x^3 - 10x^2 + 5 = 0, \qquad x = ?$$

1.Arama/incremental search $\Delta x = 0.2$ olsun

$x = 0 \to 5 \qquad 0.2 \to 4.608 \qquad 0.4 \to 3.464 \qquad 0.6 \to 1.616 \qquad 0.8 \to -0.888$

kök 0.6 ile 0.8 arası.

$\Delta x = 0.005$ olsun.

$0.65 \to 1.0496 \qquad 0.7 \to 0.4430 \qquad 0.75 \to -0.20301$

root 0.7-0.75 arası.

$\Delta x = 0.01$ olsun.

$x = 0.71 \to 0.3169 \qquad 0.72 \to 0.1892 \qquad 0.73 \to 0.06 \qquad 0.74 \to -0.007$

root $\cong 0.735$

Roots of Equations

2. İkiye bölme/Bisection

$0.6 \to 1.616$ $\qquad 0.8 \to -0.888$ $\qquad x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = 0.7 \to 0.4430$ 0.7 ve 0.8 (ters işaretli olanlar)$\Rightarrow 0.75 \to -0.20301$

0.7 ve 0.75 (ters işaretli olanlar)$\Rightarrow 0.725 \to 0.1248$

0.75 ve 0.725 (ters işaretli olanlar)$\Rightarrow 0.7375 \to -0.0374$

0.7375 ve 0.7312 (ters işaretli olanlar)$\Rightarrow 0.7344 \to -0.044$

0.7344 ve 0.7375 (ters işaretli olanlar)$\Rightarrow 0.7360 \to -0.0183$

0.7360 ve 0.7344 (ters işaretli olanlar)$\Rightarrow 0.7352 \to -0.0078$

3.Sekant

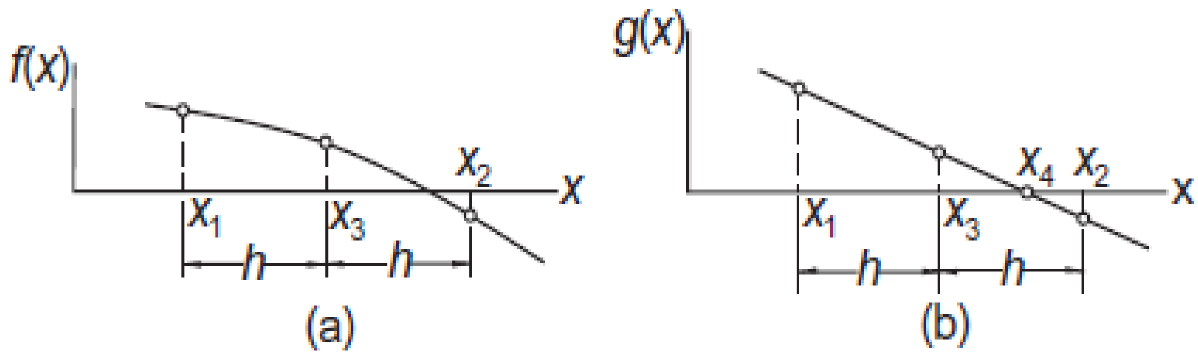
$x_1 = 0.6, \qquad x_2 = 0.8, \qquad x_3 = x_2 - \frac{f_2(x_2-x_1)}{f_2-f_1} = 0.7291 \qquad x_4 = 0.7344, \qquad x_5 = 0.7346$

3.2.false position $x_1 = 0.6,\ f_1 = (0.6)^3 - 10(0.6)^2 + 5 = 1.6160$ $x_2 = 0.8,\ f_2 = (0.8)^3 - 10(0.8)^2 + 5 = -0.8880$ $x_3 = x_2 - f_2\frac{x_2-x_1}{f_2-f_1} = 0.791 \to 0.0721$

$0.7291 ve 0.8 \to x_3 = 0.7344 \to f3 = 0.0027...$

Ridder Metodu

- Bu metodda kökünü bulmak istediğimiz fonksiyonu doğrusal olmaya yaklaştıracak şekilde modifiye ediyoruz.



x_1, x_2 arası kök olsun.

$$f_3 = f(x_3), x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} icin \qquad g(x) = f(x)e^{(x-x_1)Q}$$

Q şu şekilde seçilir $\rightarrow (x_1, g_1), (x_2, g_2), (x_3, g_3)$ bir doğru üzerinde.

Ridder Metodu

- g(x) ve f(x) in kökleri aynı.

$$g_1 = f_1 \qquad g_2 = f_2 e^{2hQ} \qquad g_3 = f_3 e^{hQ}, \qquad h = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$g_3 = \frac{g_1 + g_2}{2} \Rightarrow f_3 e^{hQ} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 e^{2hQ}) \qquad e^{hQ} = \frac{f_3 \mp \sqrt{f_3^2 - f_1 f_2}}{f_2}$$

$$x_4 = x_3 - g_3 \frac{x_3 - x_1}{g_3 - g_1} = x_3 - f_3 e^{hQ} \frac{x_3 - x_1}{f_3 ehQ - f_1} = x_3 \mp (x_3 - x_1) \frac{f_3}{\sqrt{f_3^2 - f_1 f_2}}$$

$$+ if\ f_1 - f_2 > 0$$
$$- if\ f_1 - f_2 < 0$$

Ridder Metodu: Örnek

$$x^3 - 10x^2 + 5 = 0, x = ?$$

$x_1 = 0.6 \rightarrow f_2 = 1.61$ $x_2 = 0.8 \rightarrow f_2 = -0.8880$ $x_3 = 0.7 \rightarrow f_3 = 0.4430$

$f_1 > f_2$ + seçiyoruz

$$x_4 = x_3 + (x_3 - x_1)\frac{f_3}{\sqrt{f_3^2 - f_1 f_2}} = 0.7348 \qquad f_4 = -0.0026$$

kökler x_1, x_4 arasında, buradan $\quad x_1 \leftarrow x_3 \quad x_2 \leftarrow x_4$

$$x_1 = 0.7, \qquad x_2 = 0.7348$$

İkinci iterasyon: $\quad x_3 = 0.7174, f_3 = 0.2226, \quad f_1 > f_2 \quad \rightarrow x_4 = 0.7346$

Newton Raphson ile Kök Bulma

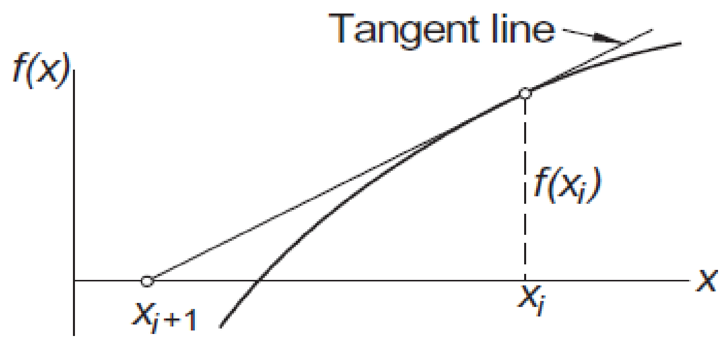
- Newton Raphson ile kök bulmak için fonksiyonumuzu Taylor Serisi ile açıyoruz ve iki ve yüksek dereceleri ihmal ediyoruz.

$$f(x_i + 1) = f(x_i) + f\prime(x_i)(x_{i+1} - x_i) + O(x_{i+1} - x_i)^2$$

x_{i+1} değeri $f(x) = 0$ için kök olsun.

- Newton-Raphson update kuralı :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f\prime(x_i)}$$



Newton Raphson ile Kök Bulma: Örnek

<u>örnek</u>

$$x^3 - 10x^2 + 5 = 0$$

0.7'ye yakın olan kökü bulalım.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 10x_i^2 + 5}{3x_i^2 - 20x_i} = \frac{2x_i^3 - 10x_i^2 - 5}{3x_i^2 - 20x_i}$$

İki iterasyon yapalım: $x \leftarrow 0.73536$ $\quad x \leftarrow 0.734660$

Newton Raphson ile birden fazla değişkenli problemler için kök bulma

- Burada tek bir denklem yerine bir denklem sistemi vardır.

$$f_1(x_1...x_n) = 0$$
$$f_2(x_1...x_n) = 0$$
$$...$$
$$f_n(x_1...x_n) = 0$$

Bu problemi çözmek için çok değişkenli Newton Raphson Metodu kullanılabilir, çok boyutlu Taylor Serisini yazalım

$$f_i(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = f_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j + ... + O(\Delta x^2)$$

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{\Delta x}) = \vec{f}(\vec{x}) + J(x)\vec{\Delta x} \quad J : Jacobian \qquad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Newton Raphson ile birden fazla değişkenli problemler için kök bulma

- İki ve yüksek dereceli terimleri ihmal ederek sıfıra eşitlersek kökümüzü bulabiliriz:

$$f(\vec{x}) + J(x)\vec{\Delta x} = 0 \Rightarrow J(x)\vec{\Delta x} = -f(\vec{x})$$

- bir ilk x değeri seçilir

- $f(x)$ hesaplanır

- $J(x)$ matrix hesaplanır

- Δx çözülür

- $\vec{x_{k+1}} = \vec{x_k} + \vec{\Delta x}$

Newton Raphson ile birden fazla değişkenli problemler için kök bulma örneği

$x^2 + y^2 = 3$ ve $xy = 1$ in ortak çözümünü bulunuz.

$$\begin{gathered} f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ f_2(x,y) = xy - 1 = 0 \end{gathered} \qquad J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 - y^2 + 3 \\ -xy + 1 \end{bmatrix}$$

Başlangıç Noktası: x=0.5 y=1.5 İlk iterasyon:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta x = \Delta y = 0.125$$

$$x = 0.625 \qquad y = 1.625$$

Newton Raphson ile birden fazla değişkenli problemler için kök bulma örneği

İkinci İterasyon

$$\begin{bmatrix} 1.250 & 3.250 \\ 1.625 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.031250 \\ -0.015625 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta x = \Delta y = -0.00694$$

$$x = 0.61806 \qquad y = 1.61806$$

Üçüncü İterasyon

$$\begin{bmatrix} 1.23612 & 3.23612 \\ 1.61806 & 0.61806 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000116 \\ -0.000058 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta x = \Delta y = -0.00003$$

$$x = 0.61803 \qquad y = 1.61803$$