Fark Denklemleri ile Sayısal Türev/Numerical Derviatives with Finite Difference Equations

Sayısal olarak türev hesaplamak için Taylor serisini kullanalım.

$$f(x+h) = f(x) + hf\prime(x) + \frac{h^2}{2!}f\prime\prime(x) + ... \qquad (a)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf\prime(x) + \frac{h^2}{2!}f\prime\prime(x) - ... \qquad (b)$$

Serileri toplayıp çıkarabiliriz. Böylelikle birinci ve ikinci fonksiyon türevlerini elde edebiliriz.

$$f(x+h)-f(x-h) = 2hf\prime(x)+\frac{h^3}{3}f\prime\prime\prime(x)+... \Rightarrow f\prime(x) \cong \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$f(x+h)+f(x-h) \cong 2f(x) + h^2 f\prime\prime(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + ...$$

$$\Rightarrow f\prime\prime(x) \cong \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \qquad (d)$$

Fark Denklemleri ile Sayısal Türev

Daha yüksek dereceli türevler için $f(x \mp 2h), f(x \mp 3h), \ldots$ terimleri kullanılır.

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf\prime(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f\prime\prime(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f\prime\prime\prime(x)\ldots \qquad (e)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf\prime(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f\prime\prime(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f\prime\prime\prime(x)\ldots \qquad (f)$$

Yukarıdaki (a,b,e,f) yada (c,e,f) denklemler kullanılarak;

$$f\prime\prime\prime(x) \cong \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$$

olarak bulunur.

Fark Denklemleri ile Sayısal Türev

- Şimdiye kadar simetrik terimleri kullandık. Ör. $f(x+h)$, $f(x-h)$

- Ancak türevler simetrik olmayan terimler kullanılarakta elde edilebilir.

- Örneğin ilk türev (a) denklemi kullanılarak hesaplanabilir;

$$f\prime(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Ya da ikinci türev (e) ve (a) denklemleri kullanılarak hesaplanabilir;

$$f\prime\prime(x) \cong \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

- Bunlara benzer şekilde daha üst dereceli türevleri asimetrik denklemler kullanılarak da hesaplanabilir.

Fark Denklemleri ile Sayısal Türev

- h parametresi nasıl seçilmeli?

- h çok küçük olursa teoride iyi ama pratikte

$$f(x) \cong \ f(x \mp h) \cong f(x \mp 2h), ...$$

  olabilir.

- f değerlerini sonlu sayıda bit ile tuttuğumuz için, bir noktadan sonra küsüratları tutamayız ve bu sorun ortaya çıkar.

- Ayrıca, küçük h değerleri gürültüyü amplify eder, fonksiyondaki istenmeyen küçük değer değişiklikleri sorunlara yol açar.

- Öte yandan eğer h değeri çok büyük olursa ihmal ettiğimiz değerler yani hatamız çok büyük olur; f'teki değişim iyi yakalanamaz.

Richardson Extrapolation ile Sayısal Türev

- Richardonson Extrapolation sayısal hesaplamalar için genel bir yöntemdi (sadece türeve has değil).

- Fark denklemleri ile türev hesaplamak için de kullanılabilir.

- h ye bağlı bir yöntemin G diye bir sayıyı hesaplamak için kullanıldığını varsayalım.

$$G = g(h) + E(h)$$

G: gerçek değer, g(h): Metodun sonucu, E(h): Hata

Richardson Extrapolation ile Sayısal Türev

- Eğer hata $E(h) = ch^p$ formundaysa; Richardson Extrapolation yöntemi bu hatayı ortadan kaldırır.

$$h = h_1 \; icin \; G = g(h_1) + ch_1^p \Rightarrow c = \frac{G - g(h_1)}{h_1^p}$$

$$h = h_2 \; icin \; G = g(h_2) + ch_2^p$$

- Bu iki denklemden c hesaplanarak yerine konup elenir.

$$G = g(h_2) + \frac{Gh_2^p - g(h_1)h_2^p}{h_1^p} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{g(h_1)(\frac{h_2}{h1})^p - g(h_2)}{(\frac{h_2}{h_1})^p - 1}$$

Richardson Extrapolation ile Sayısal Türev

$h_1 = 2h \quad h_2 = h$ kullanılırsa,

$$G = \frac{2^p g(h) - g(2h)}{2^p - 1}$$

G:yaklaşık türev

Örneğin;

$$g(h) = f\prime(x) \cong \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h^2)$$
$$g(2h) = f\prime(x) \cong \frac{f(x+2h)-f(x)}{h} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow f\prime(x) \cong \frac{4(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - (\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h})}{3}$$

$O(h^2) \Rightarrow p = 2.$

Eğri Uydurma ile Sayısal Türev

Yaklaşık türev için, fark denklemleri yerine; önce bir eğri uydurma yapıp sonra analitik türev hesaplayabiliriz.

x	0	1	2	3
y	.	.	.	.

Burada $f\prime(x)|_{x=2}$ ' i bulmak için önce f(x)' i interpolasyonla buluruz; sonra türevini analitik olarak hesaplarız.