Newton-Cotes ile Sayısal İntegral Hesabı

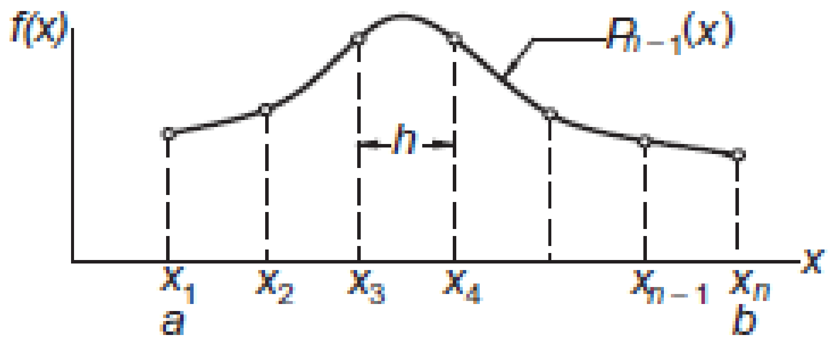
- Burda integralin yaklaşık dğerini data noktalarına polinom uydurarak hesaplıyoruz.

- İntegralin yaklaşık değeri şu genel yapı ile hesaplanabilir: $\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

- Burada A_i değerleri kaç nokta ve kaçıncı derece polinom kullandığımıza göre değişir.

Newton-Cotes ile Sayısal İntegral Hesabı

- Genel olarak n noktadan $n-1$. polinom geçirebiliriz



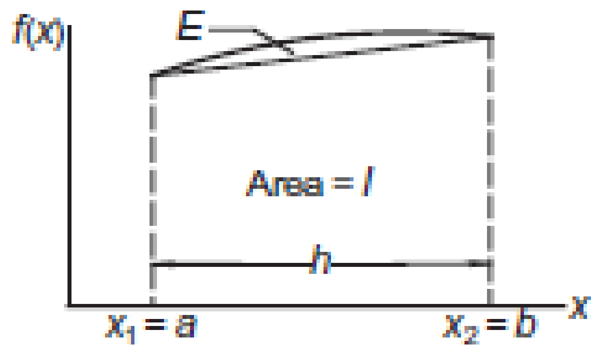
$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ell_i(x)$$

- Terimleri düzenlersek

$$I = \int_a^b P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)\int_a^b \ell_i(x)\,\mathrm{d}x] = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad (2)$$

Yamuk Kuralı/Trapezoid Rule ile İntegral Hesaplama

- Burda bir yamuk oluşturarak alanı hesaplıyoruz



n=2 için, $\Rightarrow \ell_1 = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} = \frac{-(x-b)}{h}$

$$A_1 = \frac{-1}{h}\int_a^b (x-b)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}$$

Benzer şekilde, $\ell_2 = \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{(x-a)}{h}$

$$A_2 = \frac{1}{h}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}$$

Yamuk Kurali/Trapezoid Rule ile İntegral Hesaplama

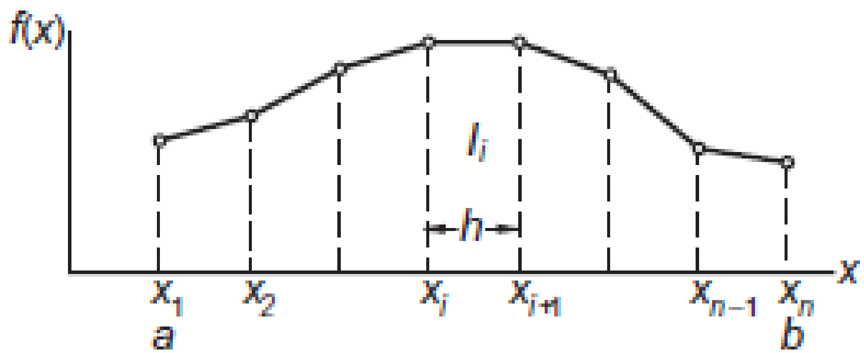
- Yerine koyarsak

$$I = [f(a) + f(b)]\frac{h}{2} \qquad (Yamuk\ Kuralı)(3)$$

- Ya da direkt geometrik olarak alan hesabından aynı sonuca ulaşabiliriz.

Bileşik Yamuk Kuralı/Composite Trapezoidal Rule ile İntegral Hesabı

- Burda noktaları iki iki gruplayıp her iki noktadan bir doğru geçirerek integral hesabı yapıyoruz, yani küçük küçük yamuklar oluşturarak alanları topluyoruz.



$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})]\frac{h}{2}$$

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} I_i = [f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\frac{h}{2} \quad (4)$$

Bileşik Yamuk Kuralının Recursive olarak Hesaplanması

- $I_k \rightarrow 2^{k-1}$ panel (yamuk) kullanılarak hesaplanan integral olsun.

$$H = b - a; \;\; I_1 = [f(a) + f(b)]\frac{H}{2}$$

$$k = 2 : I_2 = [f(a) + 2f(a + \frac{H}{2}) + f(b)]\frac{H}{4} = \frac{1}{2}I_1 + f(a + \frac{H}{2})\frac{H}{2}$$

$$k = 3 : I_3 = \frac{1}{2}I_2 + [f(a + \frac{H}{4}) + f(a + \frac{3H}{4})]\frac{H}{4}$$

- Genel terim:

$$I_k = \frac{1}{2}I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f[a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}], \quad k = 2, 3..(5)$$

- Yani her aşamadki sonucu bir önceki aşamadaki sonucu kullanarak hesaplayabiliyoruz.

Simpson Kuralı ile İntegral Hesabı

- Burda noktaları iki iki gurplamak yerine üç üç gruplayıp, bir parabol geçiriyoruz.

$$I = [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\frac{h}{3}$$

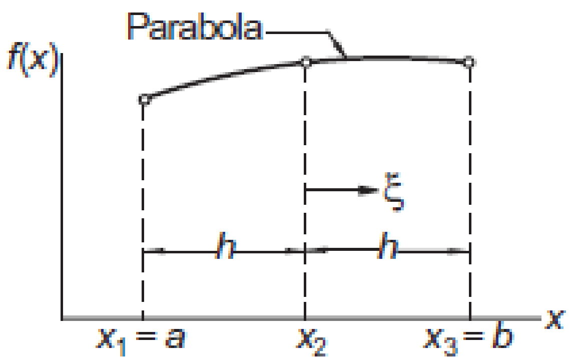


Figure 6.4. Simpson's 1/3 rule.

Sonuç olarak:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\mathrm{d}x \approx [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]\frac{h}{3} \qquad (*)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1,3,..}^{n-2} [\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\mathrm{d}x] \qquad (**)$$

Simpson Kuralı ile İntegral Hesabı

- Birden fazla üçlü grup oluşturup birleştirirsek:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I =$$

$$[f(x_1)+4f(x_2)+2f(x_3)+4f(x_4)+...+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]\frac{h}{3}$$

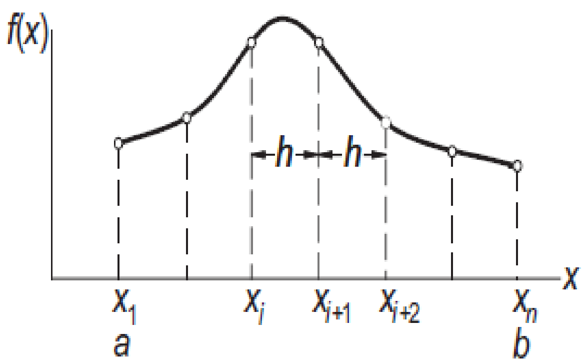


Figure 6.5. Composite Simpson's 1/3 rule.

Simpson Kuralının Çıkarımı

- 3 noktadan geçen parabolü Lagrange yöntemi ile bulalım:

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad \ell_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$\xi_1 = -h$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = h$, then $A_i = \int_a^b \ell_i(x) = \int_- h^h \ell_i(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$A_1 = \int_- h^h \frac{(\xi - 0)(\xi - h)}{(-h)(-2h)}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2h^2}\int_- h^h (\xi^2 - h\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{h}{3}$$

$$A_2 = \int_- h^h \frac{(\xi + h)(\xi - h)}{(h)(-h)}\mathrm{d}\xi = \frac{-1}{h^2}\int_- h^h (\xi^2 - h^2)\mathrm{d}\xi = \frac{4h}{3}$$

Simpson Kuralının Çıkarımı

$$A_3 = \int_{-} h^{h} \frac{(\xi + h)(\xi - 0)}{(h)(2h)} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2h^2} \int_{-} h^{h} (\xi^2 + h\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{h}{3}$$

- Sonuç olarak:

$$I = \sum_{i=1}^{3} A_i f(x_i) = [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\frac{h}{3}$$