Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

- Newton cotes sadece "smooth" fonksiyonlar için iyi sonuç verir.

- Gauss İntegral Metodu ise içinde "singularity" barındıran integraller için de kullanılabilir. Öneğin;

$$\int_a^b \omega(x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

- Burada "$\omega(x)$" singularity barındırabilir, f(x) ise "smooth" bir fonksiyon-dur.

- İntegraller gene $\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ şeklinde hesaplanır.

- A_i 'ler ise şu şekilde bulunur.

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

- Gauss İntegral yönteminde x_i'ler ve A_i'ler f(x) 2n-1. derece polinom olsaydı tam sonuç verecek şekilde seçilir.

$$\int_a^b \omega(x) P_m(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} A_i P_m(x_i) \qquad m = 0, 1, 2, ..., 2n-1$$

$$\Rightarrow \int_a^b \omega(x) x^j\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^j \qquad j = 0, 1, 2, ..., 2n-1$$

- Burada 2n bilinmeyen n tane A_i ve ne tane x_i, ve 2n denklem vardır.

- Sistem daha önce gördüğümüz yöntemlerle çözülebilir.

- Örneğin $\omega(x) = e^{-x}$ a=0 b=∞ n=2 olsun.

- n=2 için x_1, x_2, A_1, A_2 yani 4 bilinmeyenimiz vardır.

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

- Bu dört bilinmeyeni şöyle buluruz

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x\,\mathrm{d}x = A_1 x_1 + A_2 x_2 \Rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 = 1$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^2\,\mathrm{d}x = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 \Rightarrow A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = 2$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^3\,\mathrm{d}x = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 \Rightarrow A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 6$$

- Çözümler: $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, $A_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$, $A_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

- Sonuç olarak, bu noktaları polinomlar için bulduk.

- Yani 0,1,2 ve 3 polinomlar için $\sum A_i x_i$ **tam** olarak integral sonucunu verir.

- Ama genel bir f(x) için sonuç yaklaşık olur. Yani;

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2}+1)f(2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+1)f(2-\sqrt{2}))$$

$$= A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

- Her defasında her n ve her $\omega(x)$ için A_i ve x_i 'leri hesaplamaktansa, çok kullanılan $\omega(x)$'ler için bunlar önceden hesaplanıp tablolarda tutulabilir.

- Bu şekilde çok kullanılan yapılar şunlardır:

  -Gauss-Legendre : $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

  -Gauss-Laguenre : $\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

-Gauss-Hermite : $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \sum\limits_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

-Gauss-Log : $\int_0^1 f(x) ln(x)\,\mathrm{d}x \cong \sum\limits_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

-Gauss-Chebyshew :

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \cong \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) = \frac{\pi}{n} \sum f(x_i) \quad x_i = \frac{cos(2i-1)\pi}{2n}$$

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

- Bütün bu formüller için herhangi bir n için A_i ve x_i'ler tablolarda mevcuttur.

- n'i büyütmek hassasiyeti artırır ama daha çok işlem gerekir.

- n'i biz uygun hassasiyet ve işlem miktarı için biz seçiyoruz.

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı

<u>örnek</u>

$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = ?$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Gauss-Chebyshev, üst taraf 4. polinom olduğu için 3 nokta kullanırsak sonuç tam çıkar.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\ x_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \cos\frac{3\pi}{6} = 0,\ x_3 = \cos\frac{3\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{3}((1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^2 + (1-0)^2 + (1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^2) = \frac{3\pi}{8}$$

Gauss İntegralleri ile Sayısal İntegral Hesabı: Örnek

$$\int_0^{\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = ?$$

- Hiçbir formüle uymuyor!

- Ama değişken değiştirirsek $x = t^2$ $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t^2+3}{t} \mathrm{e}^{-t^2} 2t \, \mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} (t^2+3)\mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}(t^2+3) \, \mathrm{d}t$$

- Şimdi Gauss-Hermite'e uyuyor, 2. derece polinom: n=2 için tam sonuç.

$$I = A_1(t_1^2+3) + A_2(t_2^2+3) = 0.8862227((0.707107)^2+3)$$

$$+0.886227(0.707107)^2+3) = 6.20359$$