Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

- Burada diferansiyel denklemleri analitik olarak çözmeye çalışmak yerine sayısal olarak çözeceğiz.

- Bu sayısal çözüme geçmeden önce D.D'leri kısaca hatırlayalım.

- Birinci derece bir D.D.

$$y\prime = f(x, y)$$

- Çözümü bulmak için $y(x_0) = \alpha$ gibi bir değer verilmeli, çünkü integralden gelen sabiti ancak y'nin bir noktada değeri verilirse bulabiliriz.

- Birinci derece yerine n-derece olursa

$$y^{(n)} = f(x, y, y\prime ... y^{(n-1)})$$

$$y(x_0) = \alpha_1, \qquad y\prime(x_0) = \alpha_2 ... \; y^{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

- Bu n. dereceden bir tane D.D, 1. dereceden n tane D.D haline çevrilebilir.

$$y\prime = y,\ y_2 = y\prime,\ y_3 = y\prime\prime....y_n = y^{(n-1)}$$

- Şu tanımları yapalım

$$\Rightarrow y_1\prime = y_2 \quad y_2\prime = y_3....y_n\prime = f(x, y, ..., y_n)$$

$$y_1(x_0) = \alpha_1, \qquad y_2(x_0) = \alpha_2 \quad ... \quad y_n(x_0) = \alpha_n.$$

- Diferansiyel Denklemler için gereken y değerleri; sıfır için y'nin türevleri olarak verilirse, buna **ilk değer problemleri** denir.

- Eğer D.D'ler için gereken y değerleri y'nin türevleri yerine y olarak farklı değerlerde verilirse; buna **sınır değer problemleri** denir.

İlk Değer Problemleri

- Önce ilk değer problemlerine bakalım.

- n. derece D.D şöyle yazılabilir demiştik:

$$y_1{}' = y_2 \qquad y_2{}' = y_3 \quad \ldots \quad y_n{}' = f(x, y, ..y_n)$$

$$y_1(x_0) = \alpha_1 \qquad \ldots \qquad y_n(x_0) = \alpha_n$$

bunu vektör formunda şöyle yazabiliriz.

Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

$$\vec{y}\prime = F(x, \vec{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \\ f(x,y) \end{bmatrix}, \qquad \vec{y}(x_0) = \alpha$$

- Bu D.D'nin çözümü için Taylor Serisi'nden yararlanacağız.

$$\vec{y}(x+b) \cong \vec{y}(x) + h\vec{y}\prime(x) + \frac{h^2}{2}\vec{y}\prime(x)...$$

Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Örnek

$$y\prime + 4y = x_2 \qquad y(0) = 1$$

$$y(h) = y(0) + y\prime(0)h + y\prime\prime(0)\frac{h^2}{2} + y^{(3)}(0)\frac{h^3}{3!} + y^{(4)}(0)\frac{h^4}{4!}$$

$y\prime = x^2 - 4y$
$y\prime\prime = 2x - 4y\prime = 2x - 4(x^2 - 4y) = 16y - 4x^2 + 2x$
$y^{(3)} = 16y\prime - 8x + 2 = 16x^2 - 64y - 8x + 2$
$y^{(4)} = 32x - 64y\prime - 8 = 32x - 8 - 64x^2 + 256y$
$h = 0.2 \Rightarrow y(0.2) = 0.4515$

Runge Kutta Metodu

- Taylor serisi ile yaklaşık D.D çözümü yüksek dereceli türev ifadeleri için verilen d.d'nin birçok kere türevini almayı gerektiriyor.

- Bu zorluğu ortadan kaldıran metoda Runge Kutta metodu denir.

- Önce sadece 1.türevi hesaba katan Taylor Serisini yazalım.

$$\vec{y}(x+h) = y(x) + hy\prime(x) = y(x) + F(x, \vec{y})h$$

- Bu denkleme Euler Denklemi denir.

- Bu denklemi daha iyi anlamak için skaler versiyonuna bakalım

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y)$$

$$y(x+h) - y(x) = hf(x, y)$$

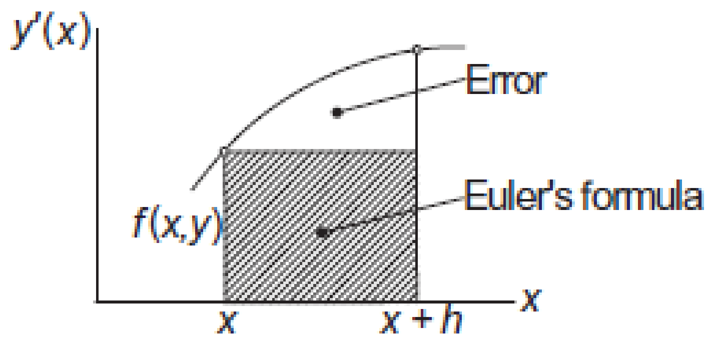
- Teoride

$$y(x+h) - y(x) = \int_x^{x+h} y\prime dx \quad = \quad \int_x^{x+h} F(x,y)dx$$

  işte hf(x,y) ifadesi bu integralin yaklaşık değeridir.

Runge Kutta Metodu

- Grafiksel olarak :



- Runge-Kutta metodu işte bu hatayı azaltmaya yarar.

Runge Kutta Metodu

- Metod şu mantığa dayanır.

$$y(x+h) = y(x) + c_0 hF(x,y) + c_1 F(x+ph, y+qhF(x,y))h$$

- Bunu ikinci derece Taylorla eşitlersek;

$$y(x+h) = y(x) + hF(x,y) + \frac{h^2}{2}F\prime(x,y)$$

$$F\prime(x,y) = \frac{dF}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{dy_i\prime} = \frac{dF}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{dy_i\prime}F_i(x,y)$$

Runge Kutta Metodu

- Bu ifadeyi y(x+h)'da yerine yazalım

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + \frac{h^2}{2}(\frac{dF}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{dy_i\prime} F_i(x,y))$$

- Runge-Kutta için yazılan y(x+h)'de ise F(x+ph,y+qhF(x,y)) şu şekilde yazılabilir.

$$F(x+ph, y+qhF(x,y)) = F(x,y) + \frac{dF}{dx}ph + qh\sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{dy_i\prime} F_i(x,y))$$

Buradan

$$y(x+h) = y(x) + (c_0+c_1)hF(x,y) + c_1h(\frac{dF}{dx}ph + qh\sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{dy_i\prime} F_i(x,y))$$

$$\Rightarrow c_0 + c_1 = 1, \qquad c_1 p = 1/2, \qquad c_1 q = 1/2$$

Runge Kutta Metodu

- Bu denklemleri sağlayan bütün c_0, c_1, p, q işimizi görür. Örneğin;
  $c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad p = 1/2, \quad q = 1/2 \quad \Rightarrow$ Modifiye Euler
  $c_0 = 1/2, \quad c_1 = 1/2, \quad p = 1, \quad q = 1 \quad \Rightarrow$ Heun
  $c_0 = 1/3, \quad c_1 = 2/3, \quad p = 3/4, \quad q = 3/4 \quad \Rightarrow$ Ralston
  Bütün bu metodlar 2.Runge-Kutta örnekleridir.

Runge Kutta Metodu

- Örneğin Modifiye Euler için

$$y(x+h) = y(x) + F(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}F(x,y))h$$

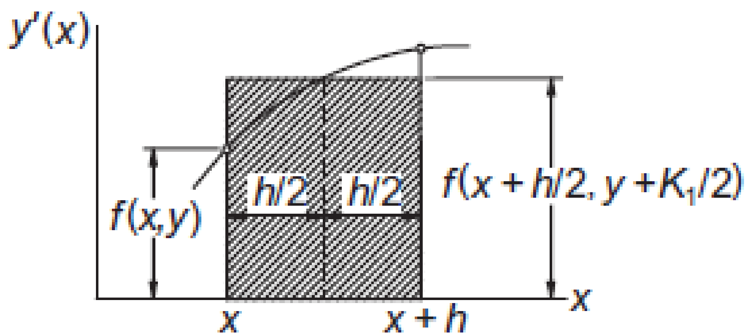
- Algoritmik olarak

$$K_1 = hF(x,y), \qquad K_2 = hF(x+\frac{h}{2}, y+\frac{K_1}{2}), \qquad y(x+h) = y(x)+K_2$$

  şeklinde yazılabilir.

Runge Kutta Metodu

- Grafiksel olarak



Runge Kutta Metodu

Runge-Kutta Örneği

$$y\prime = sin(y), \qquad y(0) = 1$$

- Bu D.D'yi $h = 0.1$ ile 0'dan 0.5'e 2. derece Runge-Kutta ile çözelim.

$$f(x,y) = sin(y) \tag{1}$$
$$K_1 = hf(x,y) = 0.1sin(y) \tag{2}$$
$$K_2 = hf(x+\frac{h}{2}, y+\frac{K_1}{2}) = 0.1sin(y+\frac{1}{2}K_1) \tag{3}$$
$$y(0.1) = 1 + 0.0863 \tag{4}$$

Runge Kutta Metodu

y=0.2 için

$$K_1 = 0.1sin(1.0863) = 0.885 \tag{5}$$

$$K_2 = 0.1sin(1.0863 + \frac{0.885}{2}) = 0.0905 \tag{6}$$

$$y(0.2) = 1.0863 + 0.0905 = 1.1768 \tag{7}$$

$$... \tag{8}$$

- Daha yüksek dereceli Runge-Kutta denklemleri de benzer şekilde elde edilir.

Runge Kutta Metodu

- Örneğin 4. derece için, şu formüller çıkar

$$K_1 = hF(x, y) \tag{9}$$

$$K_2 = hF(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K_1}{2}) \tag{10}$$

$$K_3 = hF(x + \frac{h}{2}, y + \frac{K_2}{2}) \tag{11}$$

$$K_4 = hF(x + \frac{h}{2}, y + K_3) \tag{12}$$

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{13}$$

Kararlılık (Stability)

- Bir metodda hatalar üst üste binerek çok büyük hatalara sebep olmuyorsa o metoda kararlı diyebiliriz.

- Kararlı olma, yani işlemlerdeki hataların hep birikmemesi, D.D'nin formuna, çözüm yöntemine ve h değerine bağlıdır.

- Örnek olarak Euler yöntemine bakalım, basit bir D.D için

$$y\prime = -\lambda y \qquad y(0) = \beta$$

  teorik/analitik çözüm $y(x) = \beta e^{-\lambda x}$ olur.

- Euler ile çözersek

$$y(x+h) = y(x) + hy\prime(x) = y(x) + h(-\lambda y(x)) = y(x)(1-\lambda h)$$

  burada $|1-\lambda b| > 1$ kararsız olur. $|1-\lambda h| < 1$ kararlılık için $\Rightarrow h \leq \frac{2}{\lambda}$