Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

- Bir sistemin özvektörü sistem tarafından temel olarak değiştirilmeyen vektördür.

- Sadece genliği değişir, genliğin değişme miktarına da özdeğer denir.

- Yani sistemimizi Amatrisi ile ifade edersek;

$$\vec{x} \rightarrow A \rightarrow \lambda\vec{x}$$

$$\text{ya da} \qquad A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

- Burada λ, yani özdeğerlerin analitik çözümü şu şekilde olur.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{1}$$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0 \tag{2}$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \tag{3}$$

λ cinsinden polinom $\Rightarrow$ n tane λ bulunur.

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

<u>Örnek</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -3\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

- Özdeğerler bulunduktan sonra özvektörler de bulunabilir.

$$A\vec{x} = \lambda x \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \vec{x} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -1x_1 & 2x_2 & -x_3 = 0 \\ -x_2 & x_3 & = 0 \end{array} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ - \\ 1 \end{bmatrix},$$

- Biz ise bu analitik çözüm yerine sayısal bir çözüm arıyoruz,

$$Ax = \lambda x, \qquad \lambda = ?, x = ?$$

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

- Bir benzerlik dönüşümü (similarity transformation) yapalım

$$
\begin{aligned}
x &= Px^* && (4)\\
\Rightarrow APx^* &= \lambda Px^* && (5)\\
P^{-1}APx^* &= \lambda x^* && (6)\\
Ax^* &= \lambda x^* && (7)
\end{aligned}
$$

  Burada λ'lar değişmedi, $P^{-1}AP$ ile A'nın özdeğerleri aynı.

- Dolayısı ile problemi daha basit hale getirmek için A yerine $P^{-1}AP$'nin özdeğerlerini bulabiliriz.

- Mesela bir A için $P^{-1}AP$ ' yi köşegen haline getiren bir P bulursak özdeğer bulma problemi çok basitleşir.

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

$$\begin{vmatrix} A^*_{11}-\lambda & & & \\ & A^*_{22}-\lambda & & \\ & & ... & \\ & & & A^*_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^*_1 \\ .. \\ .. \\ x^*_n \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = A^*_{11} .... \lambda_n = A^*_{nn}$

$$x^*_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^*_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Evector \Rightarrow X = Px^* = PI = P$$

- Yani köşegen haline getiren P'nin sütunları özvektörleri verir.

- O zaman eğer biz verilen A'yı köşegen haline getirecek bir sayısal yöntem bulursak, bu köşegen haline getiren matris bize direkt olarak özvektörleri köşegen haline gelmiş A'nın köşegen değerleri ise özdeğerleri verir.

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

Jacobi Rotasyonu: bir matrisi köşegen hale getrimek için sayısal bir yöntem

$$x = Rx^*$$

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & k & & & \ell & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \ell \\ \\ \\ \end{array}$$

$$c = cos\theta \quad s = sin\theta \quad R^{-1} = R^T(unitary)$$

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

Jacobi Rotasyonu(Devam)

$$
\begin{aligned}
A^* &= R^{-1}AR = R^T AR && (8)\\
A^*_{kk} &= c^2 A_{kk} + s^2 A_{ll} - 2csA_{kl} && (9)\\
A^*_{ll} &= c^2 A_{ll} + s^2 A_{kk} + 2csA_{kl} && (10)\\
A^*_{kl} &= A^*_{kl} = (c^2 - s^2)A_{kl} + cs(A_{kk} - A_{ll}) && (11)\\
A^*_{ki} &= A^*_{ik} = cA_{ki} - sA_{li} \quad i \neq k, i \neq l && (12)\\
A^*_{li} &= A^*_{il} = cA_{li} + sA_{ki} \quad i \neq k, i \neq l && (13)
\end{aligned}
$$

- $A^*_{kl}\, ve\, A^*_{lk} = 0$ olacak şekilde seçersek köşegen olmayan elemanlar sıfır olmuş olur.

- Bunu bütün elemanlar(k,l) için sıralayarak yaparsak $P = R_1 R_2 R_3 ...$

- R_1 in sıfır yaptığı yerleri R_2 bozacak ama bu etki gitgide yok olur.

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

Jacobi Rotasyonu(Devam)

- $(c^2 - s^2)A_{kl} - cs(A_{kl} - A_{ll}) = 0$
  $\Rightarrow tan2\theta = -\frac{2A_{kl}}{A_{kk}-A_{ll}} \Rightarrow \theta$ bulunur. Veya $cot2\theta = -\frac{1}{tan2\theta}$

- Açı bulunduktan sonra, R matrisi oluşturulur ve $R'AR$'de o değer sıfırlanmış olur.

- Bu işlem bütün off-diagonal yani köşegen dışı elemanlar için tekrarlanır, ta ki matris köşegen olana kadar.

- Sonuçta elimizde kalan köşegen matrisin köşeleri özdeğerleri, ve $P = R_1 R_2 ... R_m$'nin sütünları da özdeğerleri verir. Burada m matrisi köşegen hale getirek için gereken rotasyon (R) sayısıdır.

Eigenvalue-Eigenvector Problemleri

Ters Üs ve Üs Metodu

- Bu metodlarda Jacobi metodu gibi özdenklemlerin sayısal çözümü için kullanılır.

- **Ters Üs Metodu**: Verilen $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$'i çözmek içinbir ilk tahmin seçelim ve bu ilk tahmini $\vec{v}$ ile gösterelim.

- $A\vec{z} = \vec{v}$'yi çözen $\vec{z}$'yi bulalım.

- $v = \frac{z}{|z|}$ olarak update edip bu adımları $\vec{v}$ çok değişinceye kadar tekrarlayalım.

- Sonuçta $|z| = \pm\frac{1}{\lambda}$ ve son kalan $\vec{v}$ özdeğer ve özvektör'ü verir.

- İterasyonlar arasında z işaret değiştiriyorsa "-" işaret değiştirmiyorsa "$+$" olan alınır.

Ters Üs Metodu

- Bu metodun çalışma prensibi şöyledir.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{x_i} \, ve \, \vec{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \vec{x_i} \quad olarak \, yazılabilir.$$

- $A\vec{z} = \vec{v}$ 'yu çözmüştük, bunları yerine koyarsak;

$$A \sum_{i=1}^{n} z_i \vec{x_i} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{x_i}$$

Yani,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \vec{x_i} - \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i v_i) \vec{x_i} = 0 \Rightarrow z_i = \frac{v_i}{\lambda_i}$$

Ters Üs Metodu

- Sonuç olarak

$$z = \sum z_i \vec{x_i} = \sum \frac{v_i}{\lambda_i} \vec{x_i} = \frac{1}{\lambda_1}(v_1 x_1 + v_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2 + v_3 \frac{\lambda_1}{\lambda_3} x_3 ....)$$

  Dolayısı ile z x_i için v'ye göre daha iyi bir yaklaşım olur.

- Bu metod en küçük özdeğeri ve bu özdeğerin özvektörünü verir.

Üs Metodu

- Bu metod ise en büyük özdeğeri bulmada kullanılır.
- u ilk tahminimiz olsun. $\vec{z} = A\vec{u}$ 'yi bulalım.
- $u = \frac{z}{|z|}$ ile update edelim.
- Sonuçta $|z| = \pm\lambda_n$ ve $\vec{u} = \vec{x_n}$ olur.
- "+" ve "-" ters üs metoddaki gibi seçilir.

Üs Metodu

- Bu metodun çalışma prensibi de benzerdir

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\vec{x_i} = A\sum_{i=1}^{n} v_i\vec{x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(z_i - \lambda_i v_i)\vec{x_i} = 0. \qquad (z_i = \lambda_i v_i) \Rightarrow \lambda_i v_i) = A\vec{u}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\vec{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\vec{x_i} = \lambda_n\frac{\lambda_1}{\lambda_n}v_1x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_n}v_2x_2.... + v_nx_n$$